

第二章 控制系统的数学模型

2-2 控制系统的时域数学模型



2-3 控制系统的复数域数学模型



2-4 控制系统的结构图



2-5 控制系统的信号流图



• 数学模型

描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式

静态数学模型：在静态条件下/平衡条件下（即变量各阶导数为0），描述变量之间关系的代数方程。

动态数学模型：描述变量及其各阶导数之间关系的数学模型。

• 建模方法

分析法

根据系统工作所依据的物理/化学定律列写运动方程

实验法 (系统辨识法)

给系统施加某种测试信号，记录输出响应，并用适当的数学模型去逼近系统的输入输出特性

• 常见的数学模型

- ◆ 时域数学模型：微（差）分方程、状态方程；
- ◆ 复数域数学模型：传递函数、结构图、信号流图；
- ◆ 频域数学模型：频率特性。

其中结构图、信号流图是图形化的数学模型。

2-2 控制系统的时域数学模型

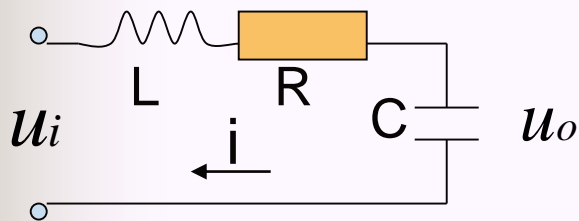
一、线性元件的微分方程

列写步骤：（P24上方）

- (1) 确定元件的输入、输出量及所需的中间变量。
- (2) 根据元件满足的物理、化学定律列出相应的微分方程。
- (3) 消去中间变量，写出只含输入、输出变量的微分方程。
- (4) 标准化——将与输入有关的各项放在等号的右边，与输出有关的各项放在等号的左边；且等号两边各阶导数按降阶排列。

2-2 控制系统的时域数学模型

例2-7：写出RLC串联电路的微分方程。



u_i — 输入

u_o — 输出

[解]：据基尔霍夫电路定理：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_o = u_i \quad \text{①}$$

$$u_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{②}$$

由②： $i = C \frac{du_o}{dt}$ 代入①得： $LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$

例2-9: 图为弹簧-质量-阻尼器的机械位移系统，列写质量 m 在输入量为外力 $F(t)$ ，输出量为位移 $x(t)$ 时的运动方程。

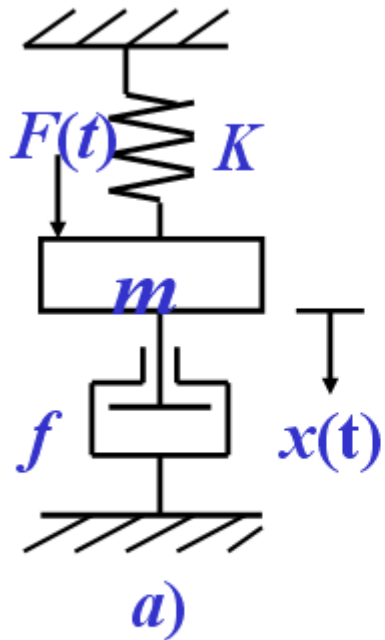


图2-3 机械位移系统

解：根据牛顿第二定律有：

$$F(t) - F_1(t) - F_2(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\begin{cases} F_2(t) \rightarrow \text{弹簧恢复力} \\ F_1(t) \rightarrow \text{阻尼器阻力} \end{cases}$$

$$F_2(t) = kx \quad F_1(t) = f \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{m}{k} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dx}{dt} + x = \frac{1}{k} F(t) \text{ ----- 二阶微分方程}$$

比较以上例题的数学模型，可以发现：

二者的数学模型均可用二阶微分方程表示（**相似系统**），仅方程中系数的大小和其具体的物理含义不同而已。

启示：1.利用电路网络可以模拟仿真非电系统；

2.利用数学模型可以撇开系统的物理属性进行普遍意义的分析研究。

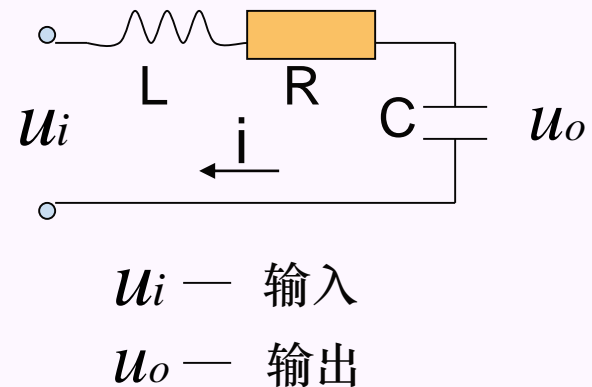


3.线性系统的基本特性

- 叠加性和齐次性
- 线性系统的性质：
 - 当几个外作用同时加于系统时，可将它们分别单独处理得出各自的响应，之后将各响应叠加即为系统总响应。
 - 一个复杂的外作用可分解成若干个简单信号，求出各简单信号的响应，之后叠加即得复杂外作用下的响应。

4、线性定常微分方程的求解

例题 2-12: 在例题 2-7 中, 若已知 $L=1\text{H}$, $R=1\Omega$, $C=1\text{F}$, 且电容初始电压 $u_o(0)=0.1\text{V}$, 初始电流 $i(0)=0.1\text{A}$, 电源电压 $u_i(t)=1\text{V}$. 试求电路突然接通电源时, 电容电压 $u_o(t)$ 的变化规律。



解: 由例题 2-7 知其数学模型为

$$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

在非零初始条件下, 方程两边进行拉氏变换, 得:

4、线性定常微分方程的求解

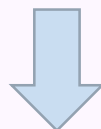
解:

$$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$



$$LC[s^2 U_o(s) - s u_o(0) - u_o'(0)] + RC[s U_o(s) - u_o(0)] + U_o(s) = U_i(s)$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_o(s) = U_i(s) + (LCs + RC)u_o(0) + LCu_o'(0)$$



$$U_o(s) = \frac{U_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{(LCs + RC)u_o(0) + LCu_o'(0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

零状态响应

零输入响应

4、线性定常微分方程的求解

解:

$$U_o(s) = \frac{U_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{(LCs + RC)u_o(0) + LCu_o'(0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

把已知条件代入: $L=1, C=1, R=1; u_o(0)=0.1,$

$$U_i(s) = \frac{1}{s} \quad u_o'(0) = \left. \frac{du_o(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C} i(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{C} i(0) = 0.1$$

$$U_o(s) = \frac{U_i(s)}{s^2 + s + 1} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1} \quad u_o(\infty) = sU_o(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = 1 + 0 = 1V$$

$$u_o(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + s + 1)} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1} \right]$$

即初始状态不影响
输出稳态值!

2-3、控制系统的复数域数学模型

1、

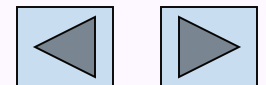
(1)、线性定常系统传递函数的定义

零初始条件下， $\frac{\text{输出量拉氏变换}}{\text{输入量拉氏变换}}$

零初始条件

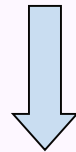
(1) $t < 0$, 输入量及其各阶导数均为0

(2) $t < 0$, 输出量及其各阶导数均为0



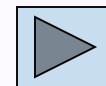
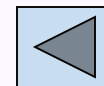
设线性定常系统由下述n阶线性常微分方程描述：

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ = b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t)$$



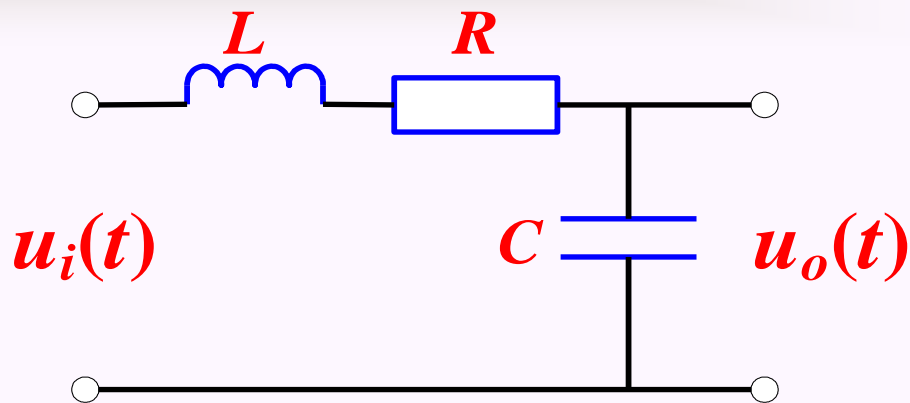
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

传递函数 \leftrightarrow 微分方程



例2-14：求例2-7RLC
无源网络的传递函数。

求 $\frac{U_o(S)}{U_i(S)}$



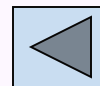
解：

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_o(s) = U_i(s)$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

零初
始条
件



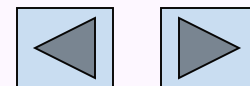
(2)、传递函数的性质

1) $G(s)$ 是复有理真分式, 即 $m \leq n$, 所有系数均为实数。

2) $G(s)$ 与 $r(t)$ 无关, 只与系统自身的结构参数有关

3) $G(s)$ $\begin{matrix} \xrightarrow{\text{d/dt} \rightarrow s} \\ \xleftarrow{\text{ } \leftarrow s} \end{matrix}$ 微分方程, 注意零初始条件。

4) $G(s)$ 的拉氏反变换是脉冲响应。



例2-15： 试求电枢控制直流电动机的传递函数

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a(t) - K_c M_c(t)$$

解：

根据线性叠加原理，分别研究 $U_a(t)$ 到 $\omega_m(t)$ 和 $M_c(t)$ 到

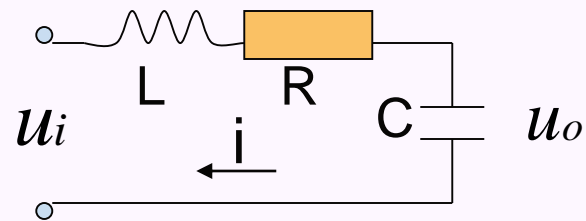
$\omega_m(t)$ 的传递函数

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

$$G_m(s) = \frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} = \frac{-K_c}{T_m s + 1}$$

6、传递函数可表征控制系统的动态性能，并用以求解系统在零初始条件下的响应。但对于非零条件下响应不能直接求解。

回顾例题2-12的解：



U_i — 输入

U_o — 输出

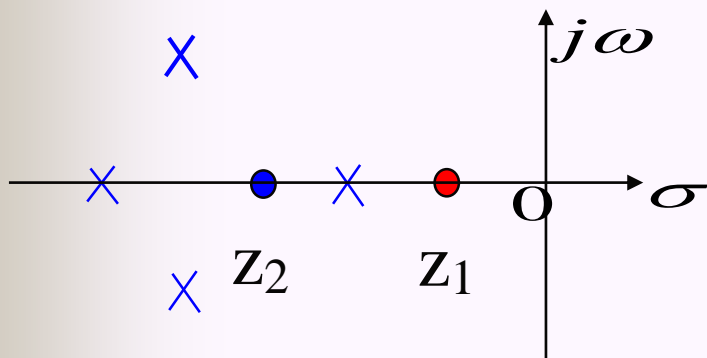
$$U_o(s) = \frac{U_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{(LCs + RC)u_o(0) + LCu_o'(0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2. 传递函数的零点与极点

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \triangleq \frac{M(s)}{N(s)}$$

$$= \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$K^* = \frac{b_0}{a_0}$$



零极点分布图

称为传递系数或根轨迹增益

传递函数也可写成如下连乘积的形式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{b_m (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_i s + 1)}{a_n (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1) \cdots (T_j s + 1)} \end{aligned}$$

$$K = \frac{b_m}{a_n} \quad \text{称为传递系数或增益或放大系数。}$$

在单位阶跃作用下，系统的稳态输出即为K。

3. 传递函数极点和零点对输出的影响

①传递函数的极点决定了系统自由运动的形态，即模态。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$r(t) = R_1 + R_2 e^{-5t}$$

$$c(t) = 9R_1 - R_2 e^{-5t} + (3R_2 - 12R_1)e^{-t} + (3R_1 - 2R_2)e^{-2t}$$

传递函数的极点可以受输入函数的激发，在输出响应中形成自由运动的模态，这是系统固有成分，其系数与输入有关。

②传递函数的零点影响各模态在响应中所占的比重。

$$G_1(s) = \frac{4s + 2}{(s + 1)(s + 2)} \quad z_1 = -0.5, \quad p_1 = -1, p_2 = -2$$

$$G_2(s) = \frac{1.5s + 2}{(s + 1)(s + 2)} \quad z_2 = -1.33, \quad p_1 = -1, p_2 = -2$$

输入信号 $r(t) = 1(t)$ ，零状态响应分别为

$$c_1(t) = 1 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}$$

零点不同

比重不同

$$c_2(t) = 1 - 0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}$$

曲线不同。

输入决定稳态输出，系统极点决定系统是否稳定。



作业

- 课本P77
- 2-6, 2-7, 2-9 (a)

4. 典型元部件的传递函数

- 1. 电位器：一种把线位移或角位移转化为电压量的装置。

$$u(t) = K_1 \theta(t)$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{\theta(s)} = K_1$$

- 2. 测速发电机
- 用于测量角速度并将它转换成电压量的装置。

$$u(t) = K_t \omega(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = K_t$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{\theta(s)} = K_t s$$

■ 3. 电枢控制直流伺服电动机/两相伺服电动机

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a(t) - K_c M_c(t)$$

$$G_1(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

$$G_1(s) = \frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} = \frac{-K_c}{T_m s + 1}$$



- 4. 无源网络

- 复阻抗法求电网络的传递函数

- 5. 单容水槽

- 调节阀的开度变化以 Δu 表示，其为输入量；
- 水槽水位变化 Δh 为输出量。则其传递函数

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

- 6. 有纯延迟的单容水槽

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

■ 7. 电加热炉

- Δu 表示电热丝上电压变化量，其为输入量；
- 炉内温度变换量 ΔT 为输出量。则其传递函数

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

典型环节及其传递函数（课本P173）

任何一个系统或元部件的传递函数都可以化成若干常见因子的乘积，常见因子即为典型环节。

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_i s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1) \cdots (T_j s + 1)}$$

典型环节通常分为以下六种：

1、比例环节

$$G(s) = K$$

式中 K-增益

实例：电子放大器，齿轮，电阻（电位器），测速电机，杠杆等。

2、积分环节

$$G(s) = \frac{1}{S}$$

实例：电动机角速度与角度间的传递函数，模拟计算机中的积分器等。

3、惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{TS + 1}$$

式中 T-时间常数

实例：RC网络，直流伺服电动机、单容水槽、电加热炉等的传递函数均包含这一环节。

4、纯时间延时环节

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

式中 τ - 延迟时间

实例：管道压力、流量等物理量的控制，其数学模型就包含有延迟环节，双容水槽的也包含这一环节。

5、振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}$$

式中 ξ - 阻尼比 $(0 \leq \xi < 1)$

ω_n 自然振荡角频率 (无阻尼振荡角频率)

实例：RLC电路的输出与输入电压间的传递函数，双容水槽的也包含这一环节。

6、微分相关环节

微分环节 $G(s) = s$

一阶微分 $G(s) = \tau s + 1$

二阶微分 $G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1$

实例：测速发电机输出电压与输入角度间的传递函数即为微分环节。

典型环节是分析系统的基础，应牢固掌握！

2-4 控制系统的结构图与信号流图

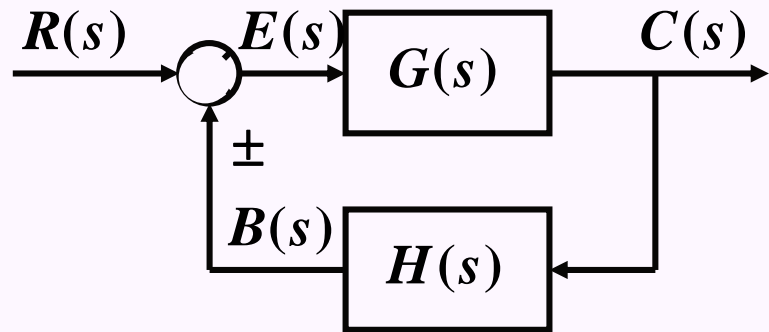
一、结构图

1. 定义

结构图是表示组成控制系统的各个元件之间信号传递关系的数学图形。适用于线性、非线性

2. 组成

- ①信号线
- ②方框
- ③引出点
- ④比较点(综合点)

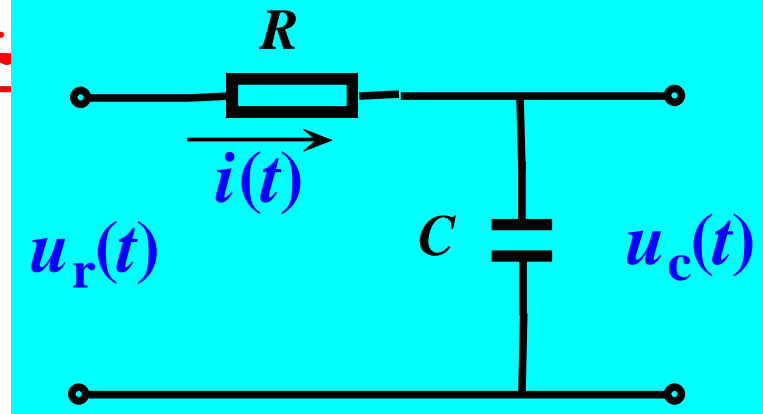


3. 结构图的绘制

第二

例如RC网路的结构图

求各元部件的微分方程



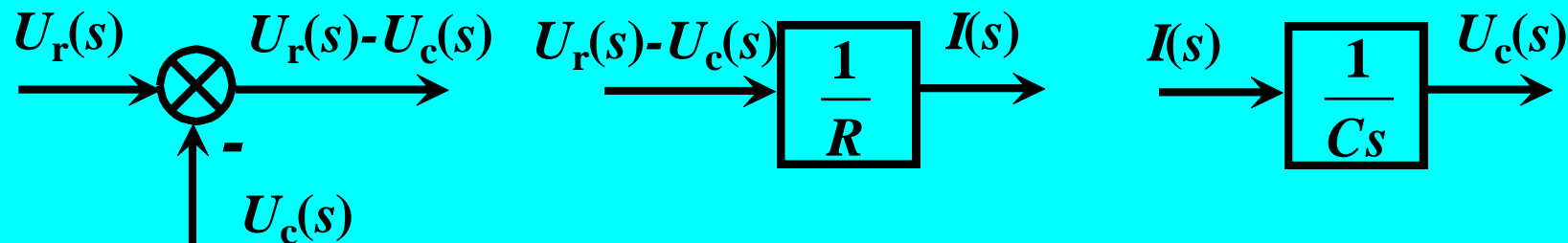
电阻: $u_r(t) - u_c(t) = Ri(t)$

电容: $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$

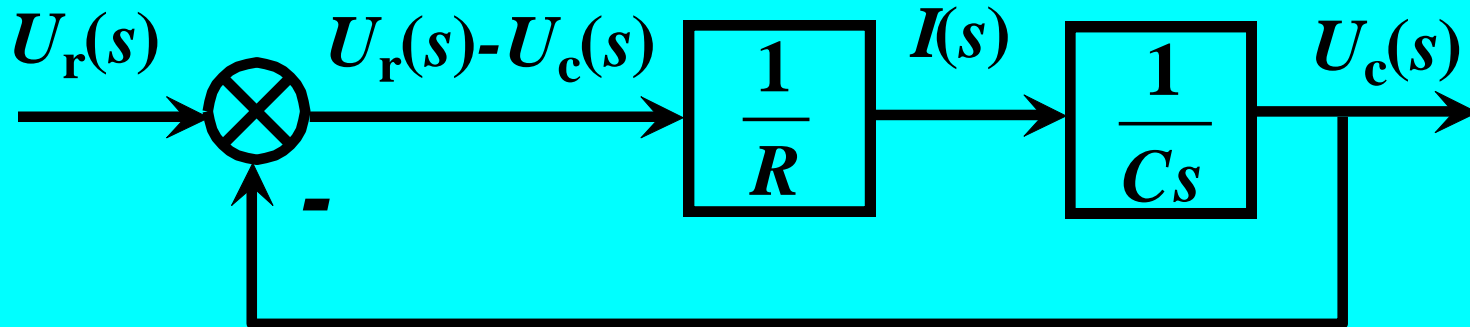
对上式进行零初始条件下的拉氏变换, 得

$$\begin{cases} U_r(s) - U_c(s) = RI(s) \rightarrow I(s) = \frac{1}{R}[U_r(s) - U_c(s)] \\ I(s) = CsU_c(s) \rightarrow U_c(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \end{cases}$$

绘制上式各子方程的方框图



将方框图连接起来,得出系统的动态结构图。



二、结构图的等效变换和简化

等效变换的目的

求取系统传递函数，对系统性能进行分析。这一过程相当于对方程组进行消元。

等效原则：

变换前后，输入输出间的数学关系保持不变！

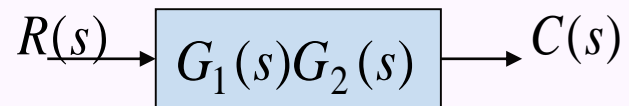
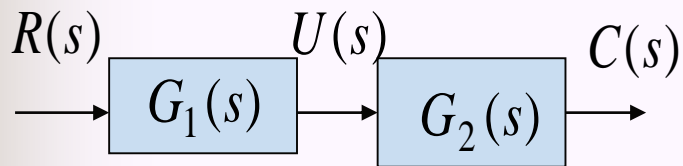
具体而言，就是变换前后前向通道中传递函数的乘积应保持不变，回路中传递函数的乘积应保持不变！

常用的等效变换:

- (1) 基本连接方式的合并: 串联、并联、反馈
- (2) 比较点/引出点的移动

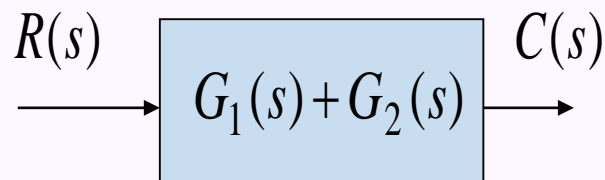
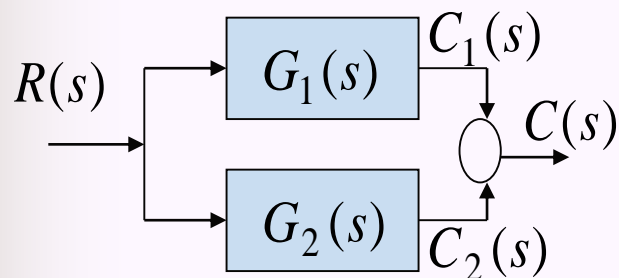
三种连接方式的合并

(1) 串联



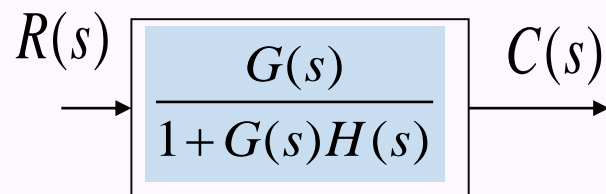
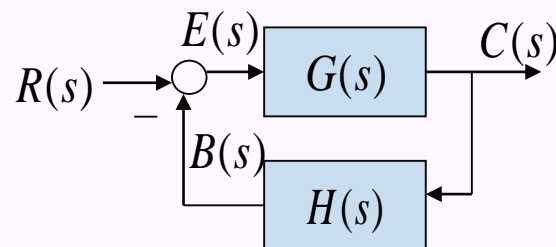
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

(2) 并联



(3) 反馈

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$



分母中负反馈取 '+' ;
正反馈取 '-' 。

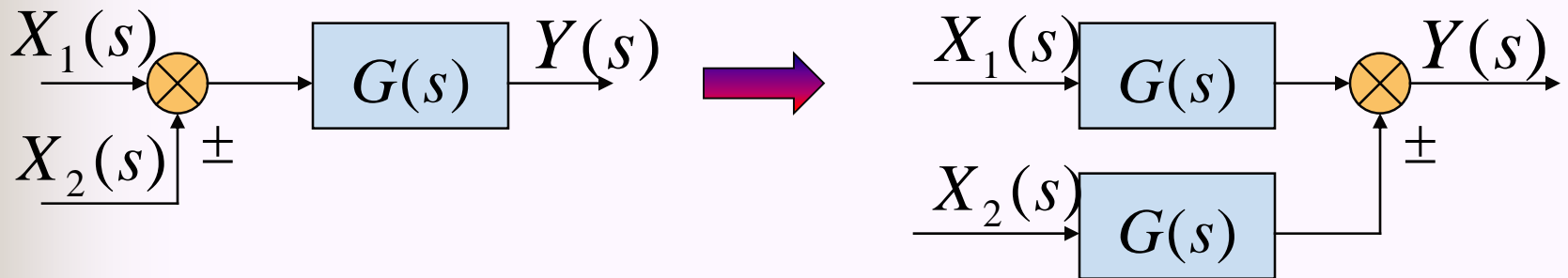
(4) 比较点和引出点的移动和互换： (P58 表2-4)

等效变换在结构图中的体现是：

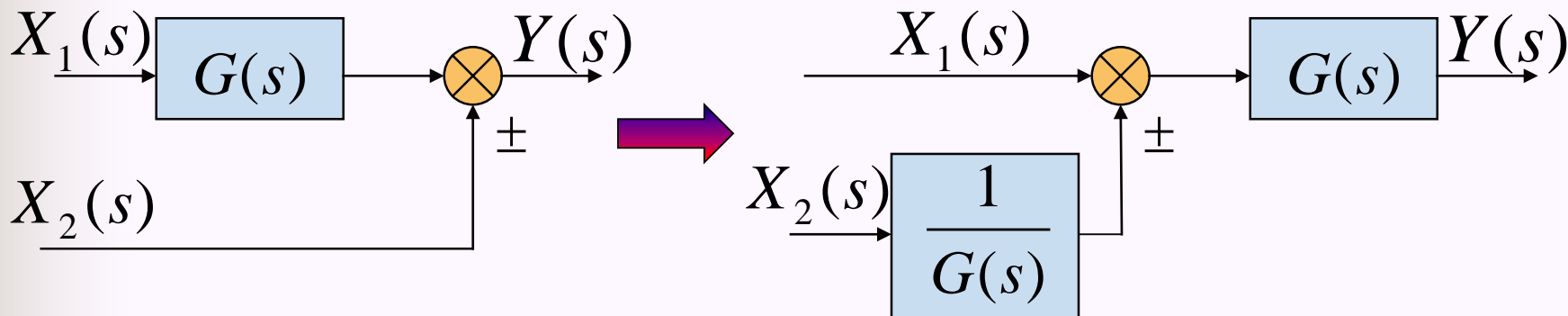
移动前后前向通路和回路中传递函数的乘积保持不变！！

①比较点的移动：

● 后移：把比较点从环节的输入端移到输出端

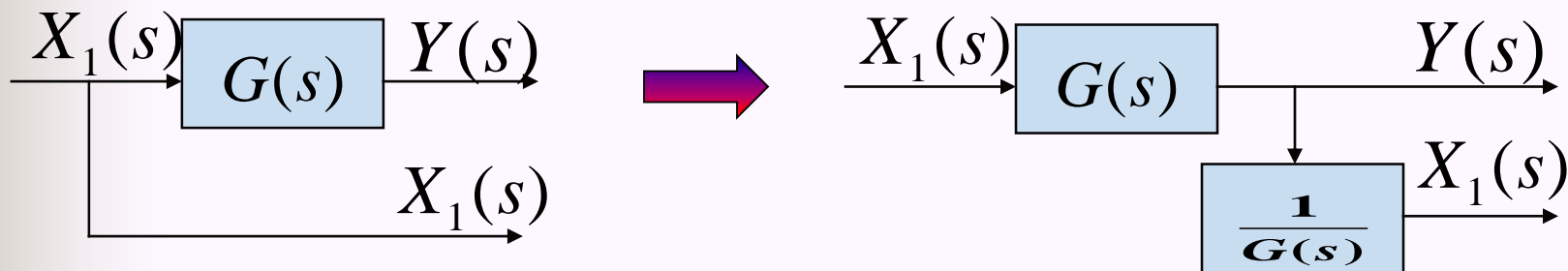


- 前移：把比较点从环节的输出端移到输入端：

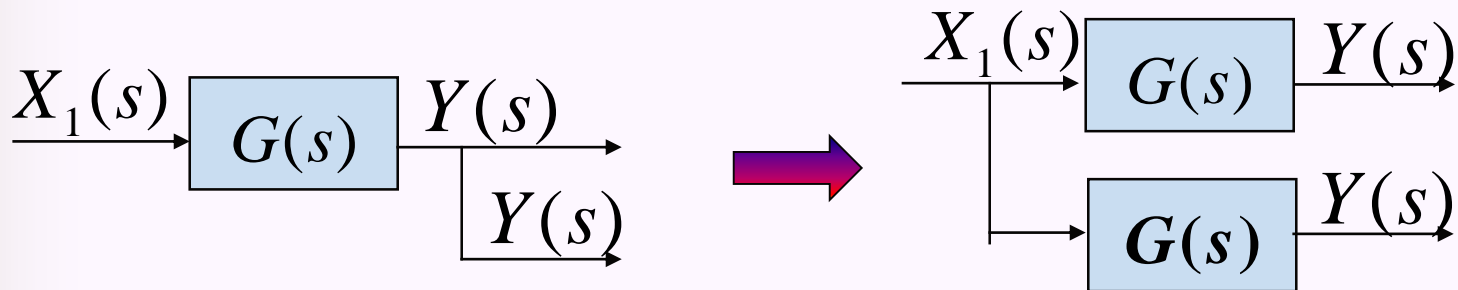


②引出点的移动:

- ◆ 后移: 引出点从环节的输入端移到输出端

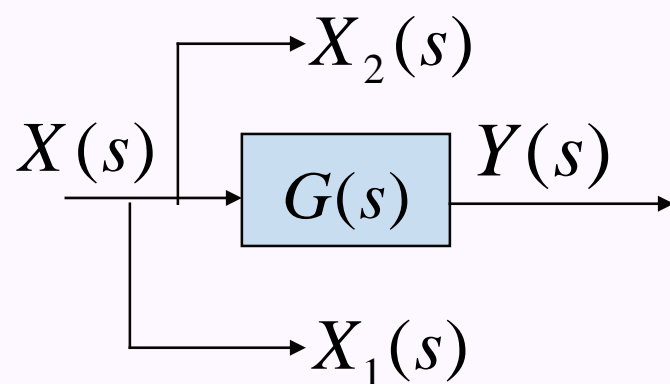
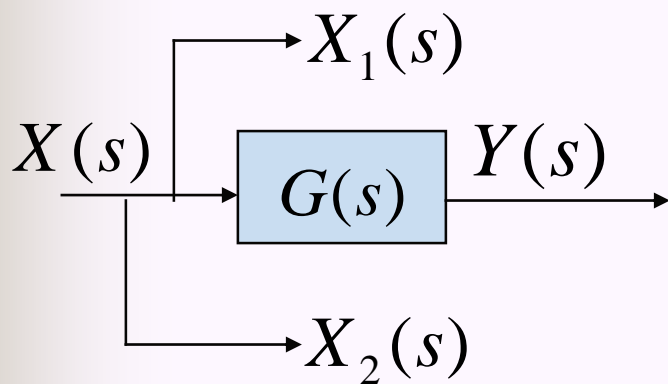
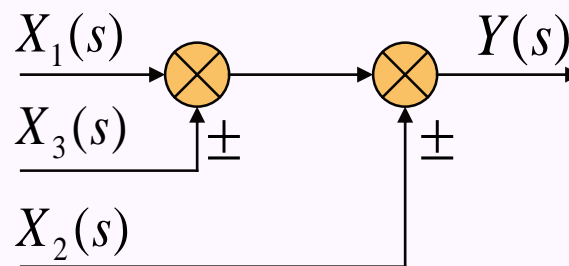
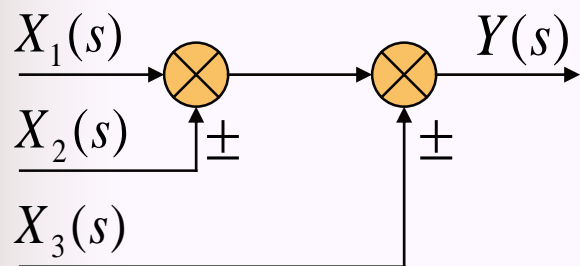


- ◆ 前移: 引出点从环节的输出端移到输入端

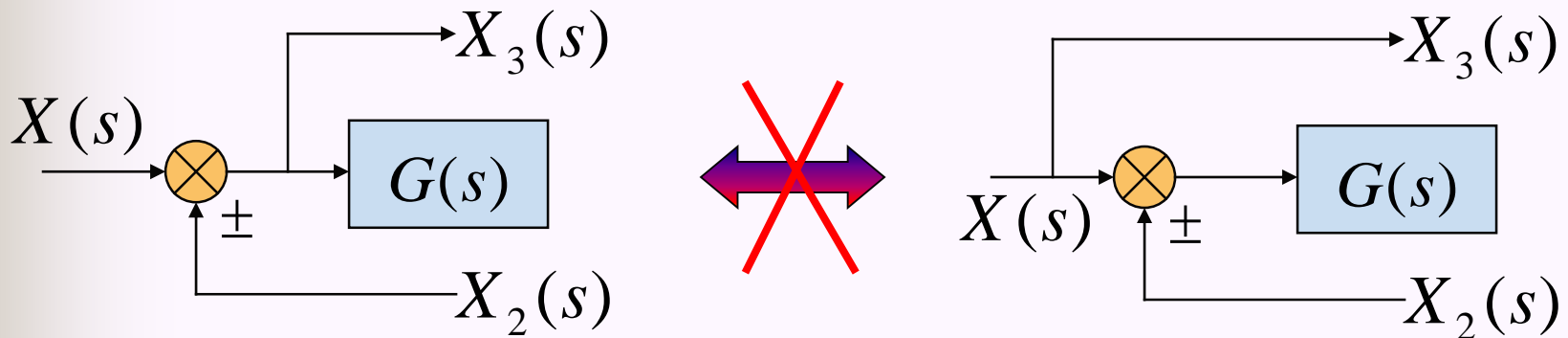


[注意]:

- ◆ 相邻的比较点/引出点位置可以互换；见下例



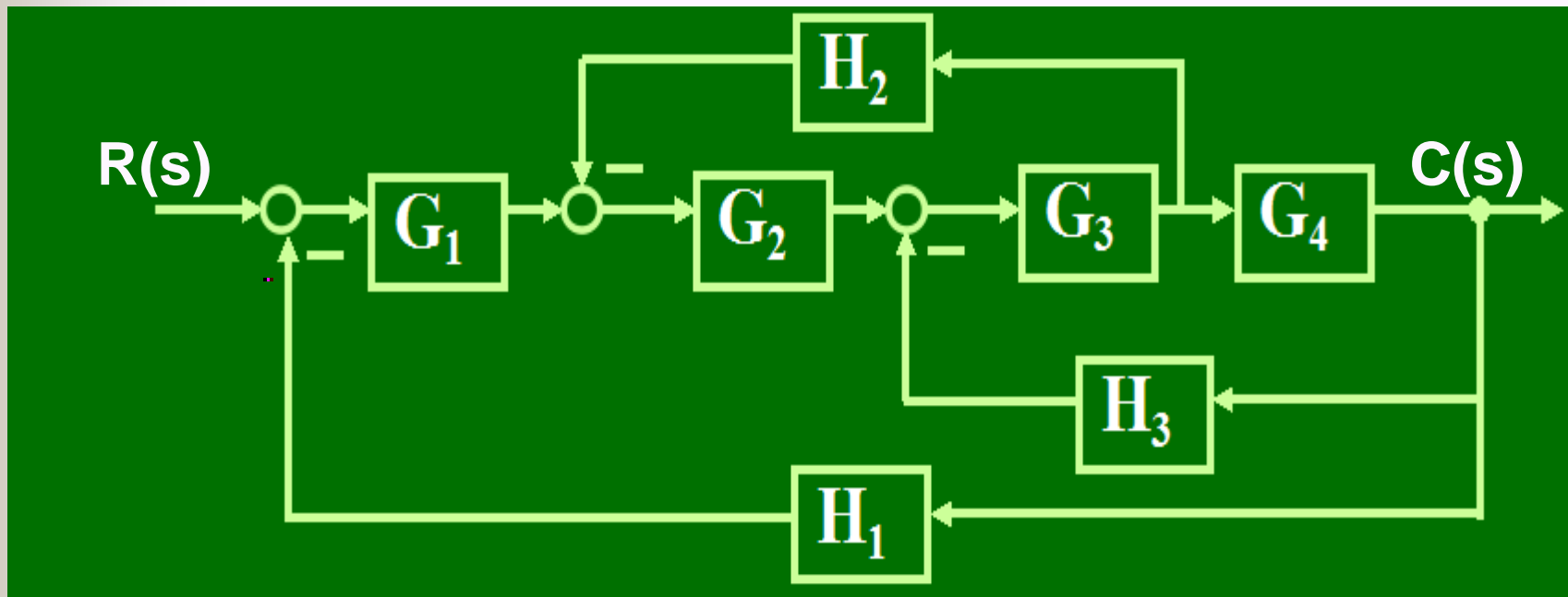
◆相邻的相加点和引出点不能直接互换！！！！

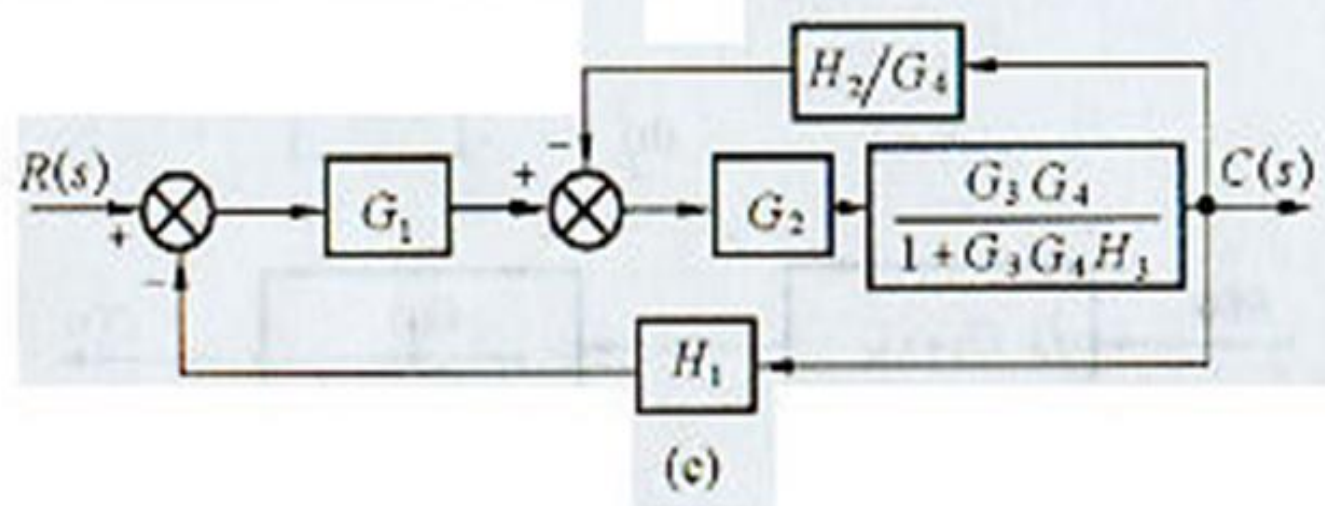
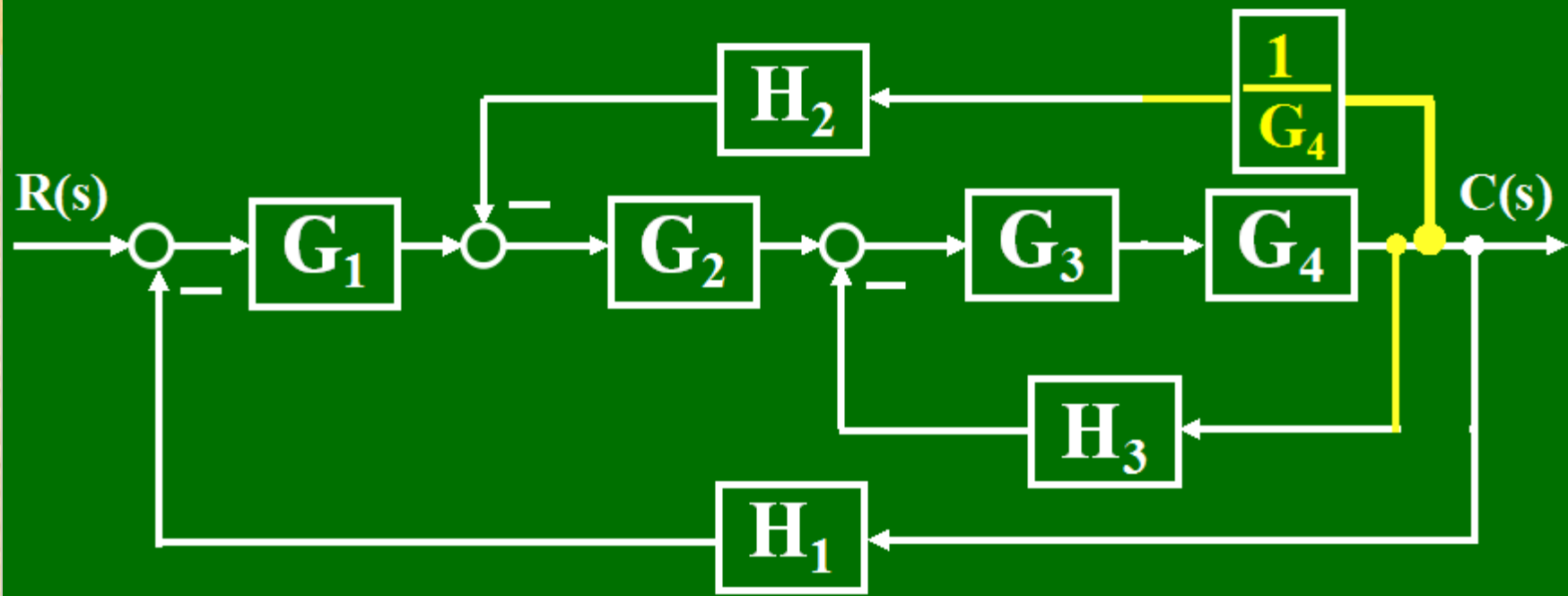


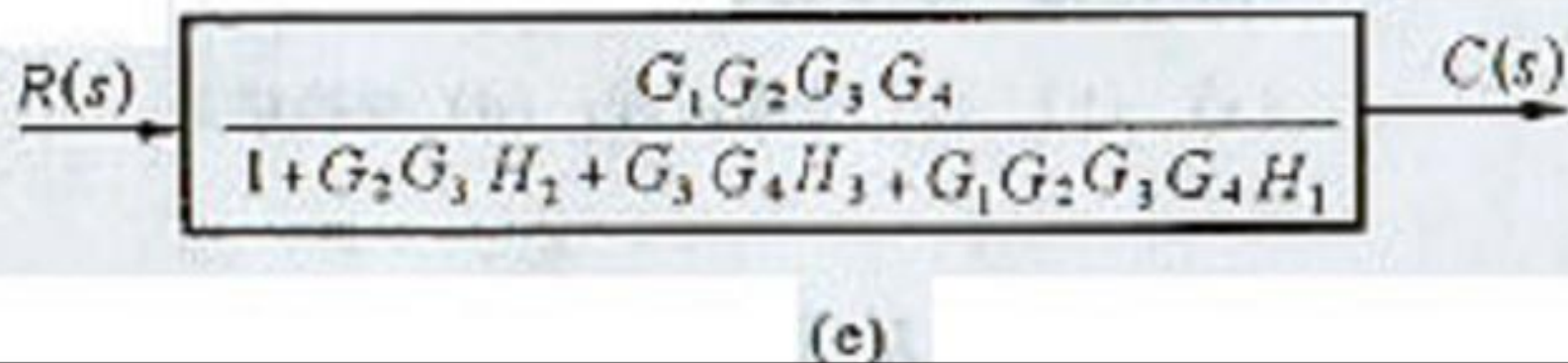
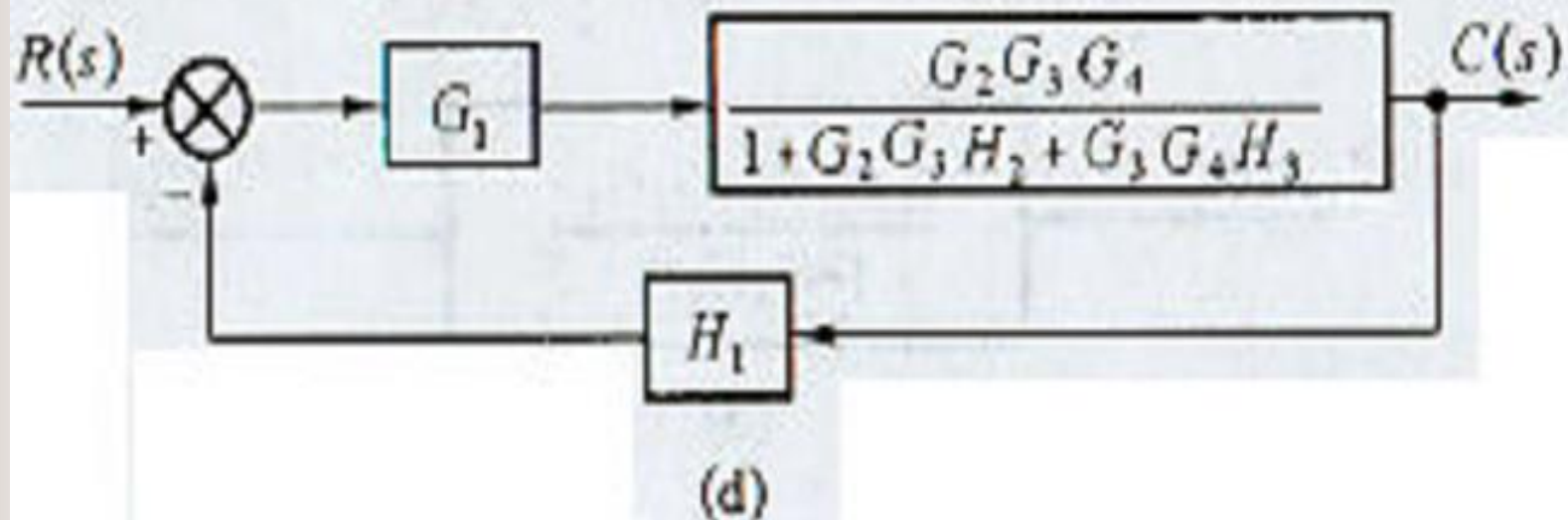
所以，一般情况下在等效变换时，相加点向相加点移动，引出点向引出点移动。即向同类移动！

此外，“-”可在信号线上越过方框移动，但不能越过相加点和引出点。（P58 表2-4上面）

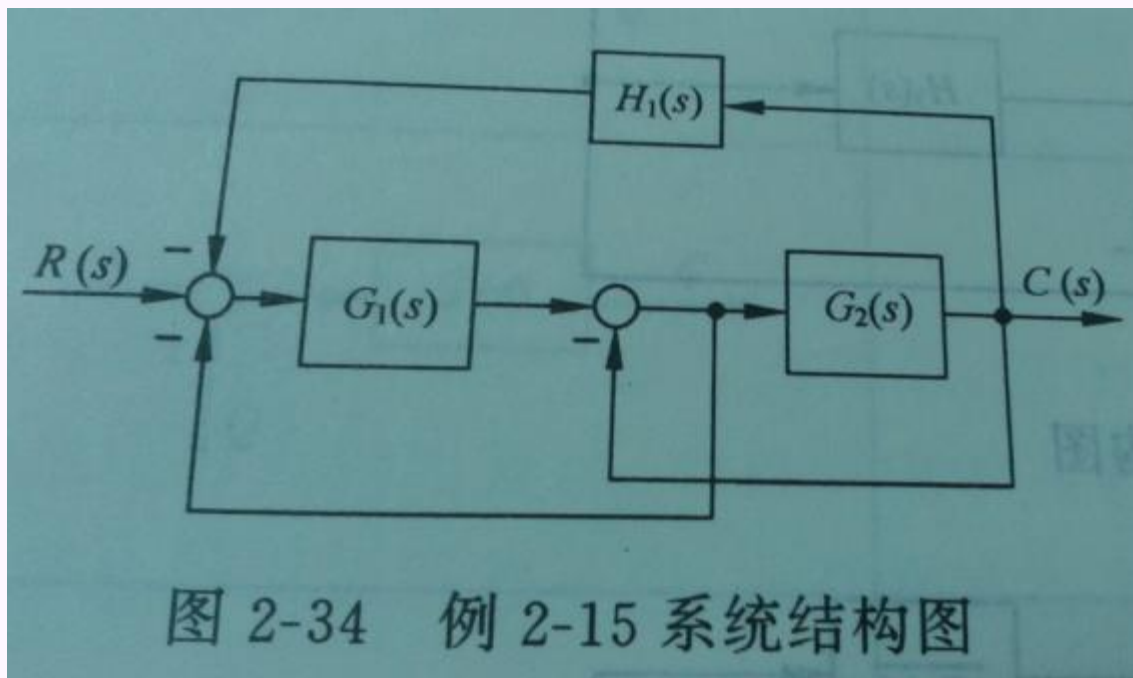
例2-17 利用等效变换的方法计算系统的传递函数。







例2-18 利用等效变换的方法计算系统的传递函数。





作业

- P75

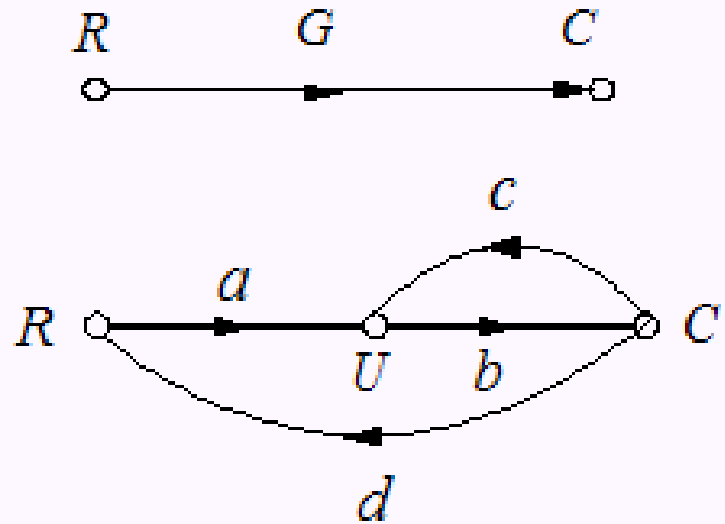
- 2-11 (a) (b)

3.信号流图的组成与性质

•信号流图只适用于线性系统，是系统图形化的数学模型。

组成：

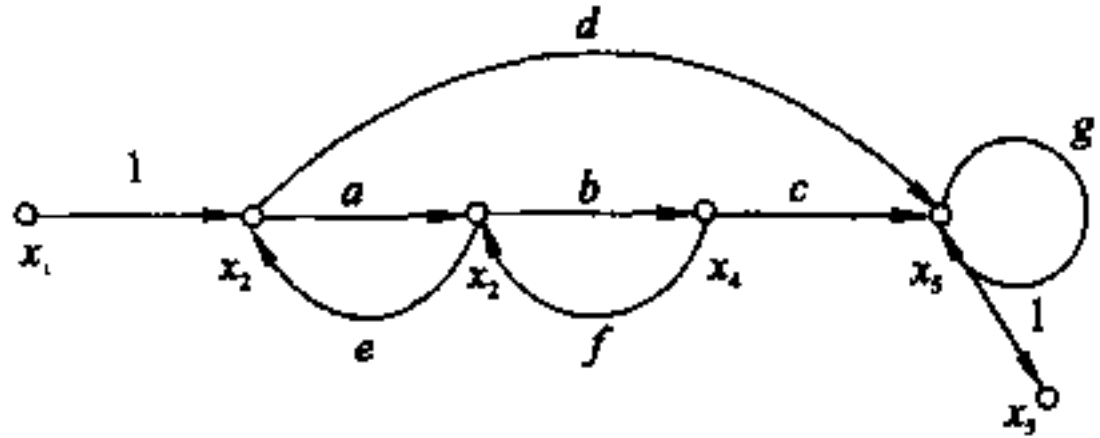
- 节点：变量
- 支路：传递方向,单向
- 支路增益：数学关系



性质：

- 节点标志系统的变量；支路相当于乘法器；
- 沿箭头单向传递；变量设置任意，信号流图不唯一。

常用的名词术语:



- 源节点 (输入节点)
- 阱节点 (输出节点)
- 混合节点: 其输出为各输入的叠加。
- 前向通路/前向通路增益
- 回路/回路增益
- 不接触回路: 没有公共节点。

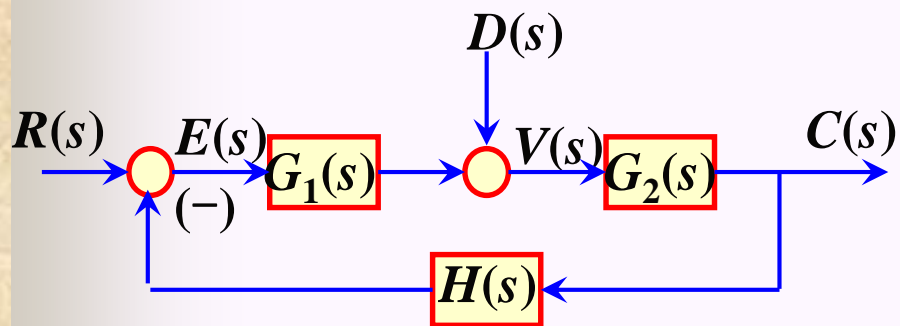
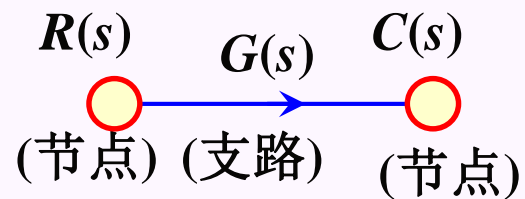
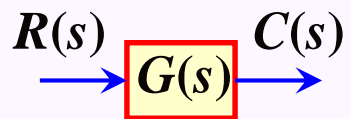
4. 信号流图的绘制

(2) 由系统结构图绘制信号流图

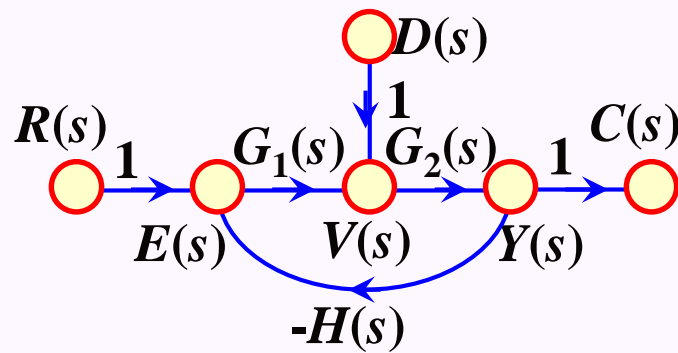
步骤：

(1) 将输入量、输出量、引出点、比较点以及必要的中间变量用节点表示。

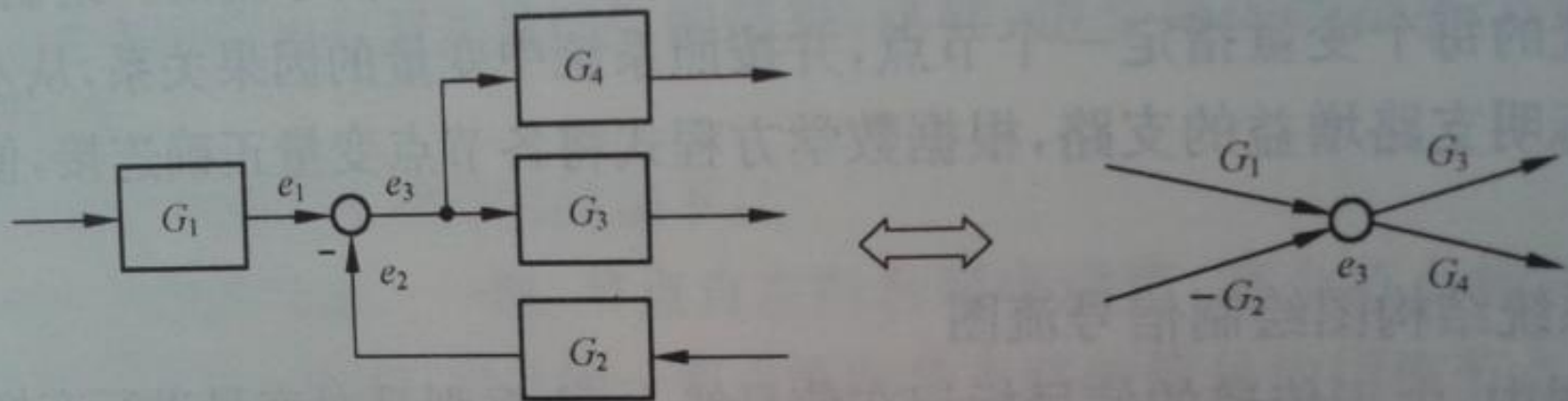
(2) 用标有传函的定向线段代（支路）替各函数方框，将各节点连接起来。



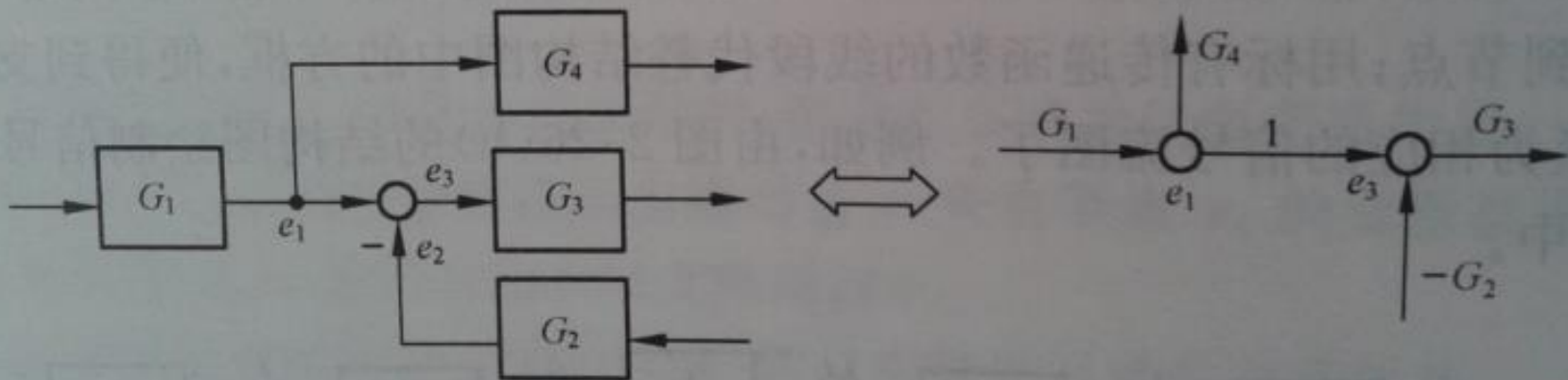
(a) 结构图



(b) 信号流图



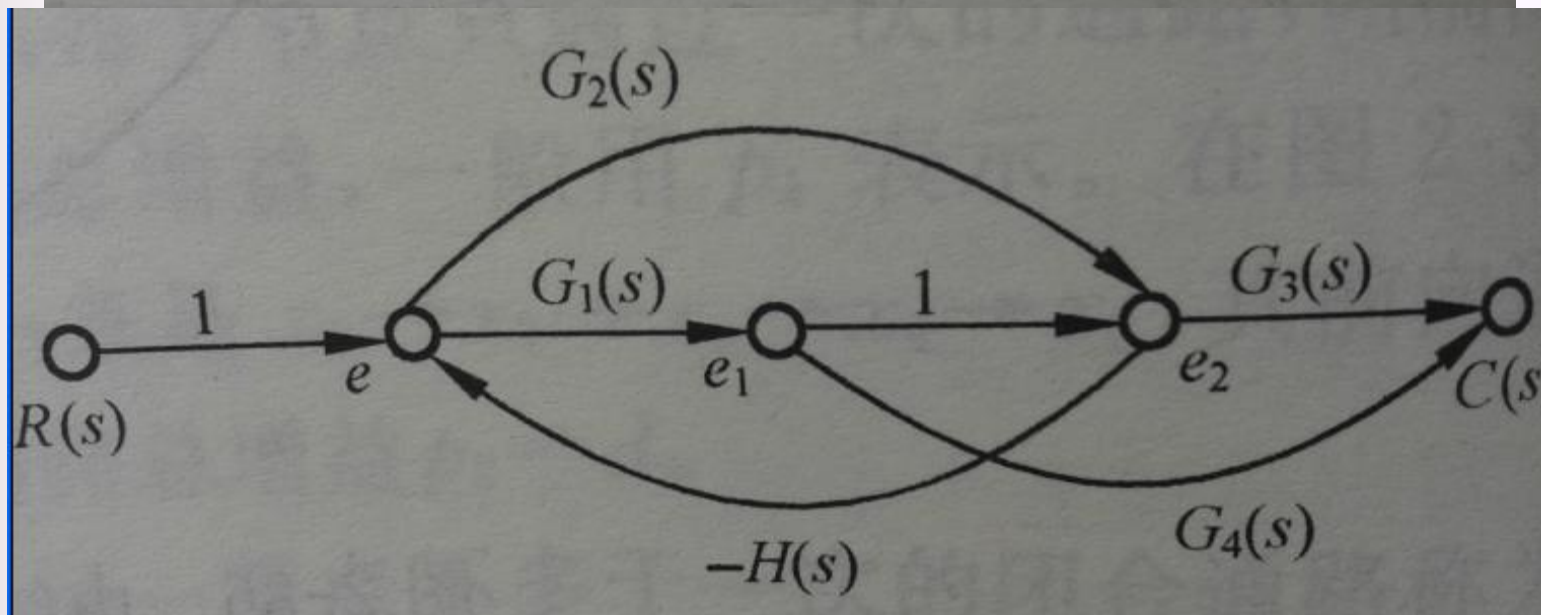
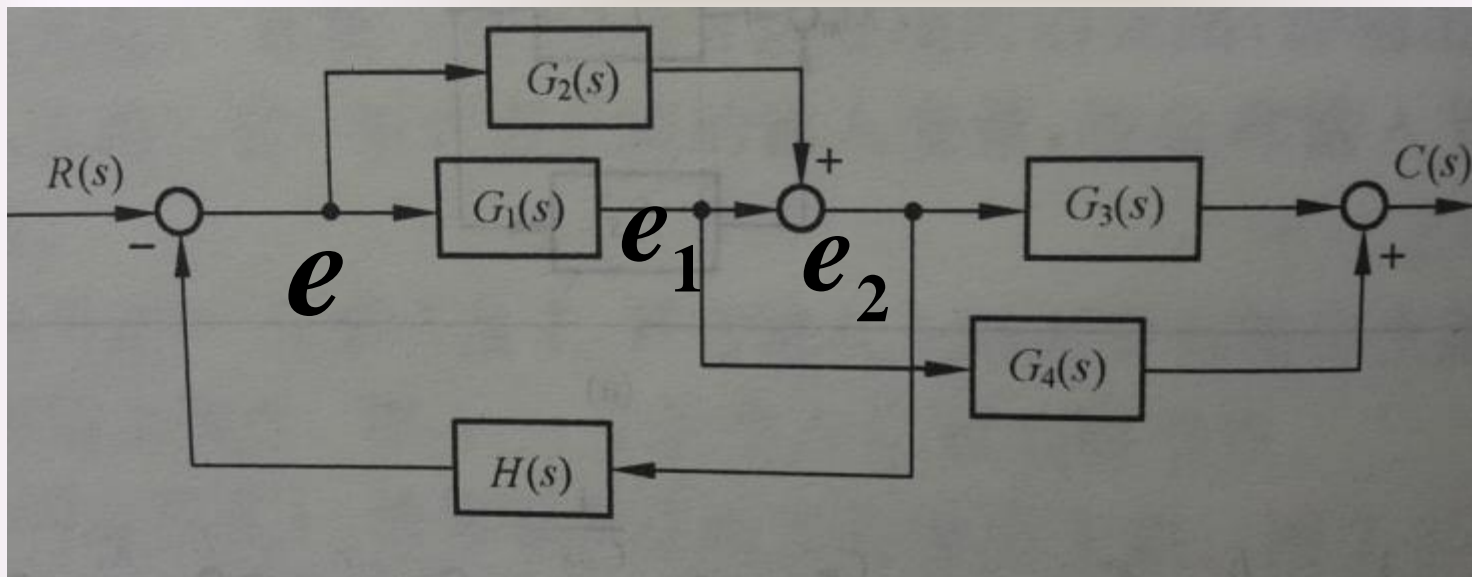
(a)



(b)

图 2-37 比较点与节点对应关系

例2-19 由结构图得系统信号流图。



四、梅森增益公式 (P66 中下式2-91)

梅逊公式为:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_K \Delta_K$$

其中: n —从输入节点到输出节点的前向通路总数。

P_k —第 k 条前向通路总增益。

• 特征式: $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$

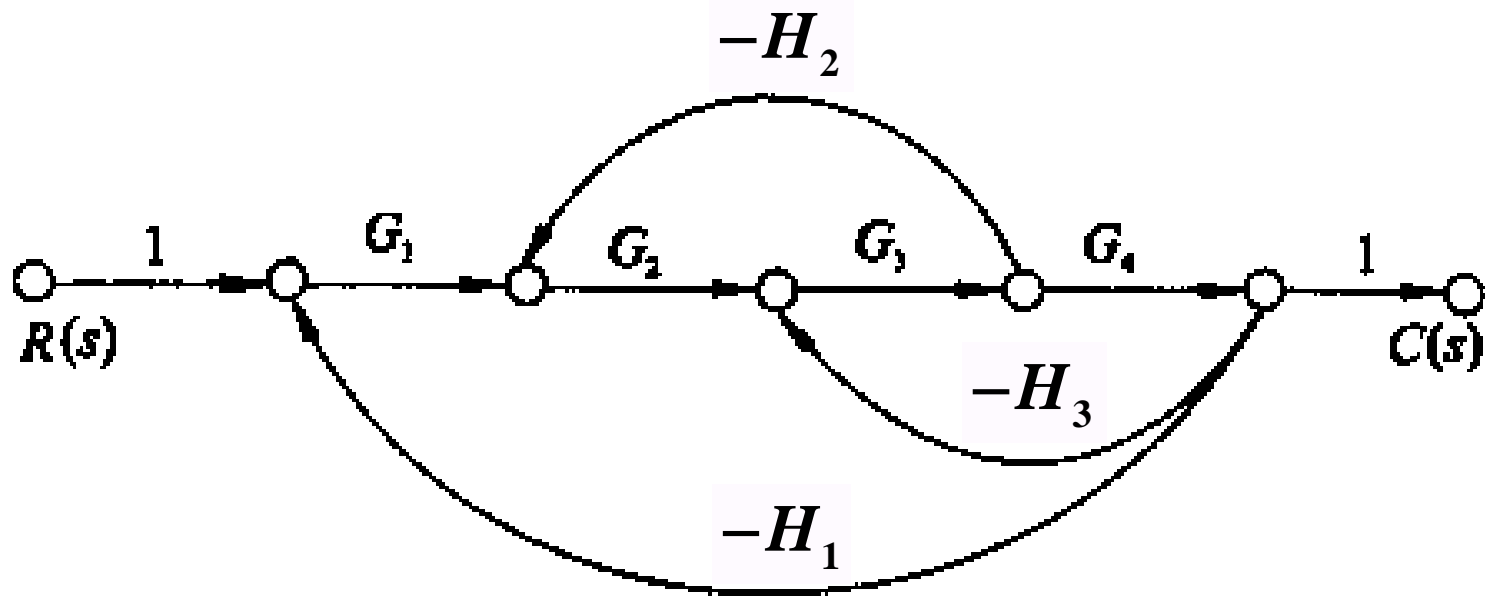
$\sum L_a$ —所有单独回路增益之和;

$\sum L_b L_c$ —两两互不接触回路增益乘积之和;

$\sum L_d L_e L_f$ —三三互不接触回路增益乘积之和。

Δ_K —余子式—把与第 K 条前向通路相接触的回路增益置为0后 Δ 余下的部分。

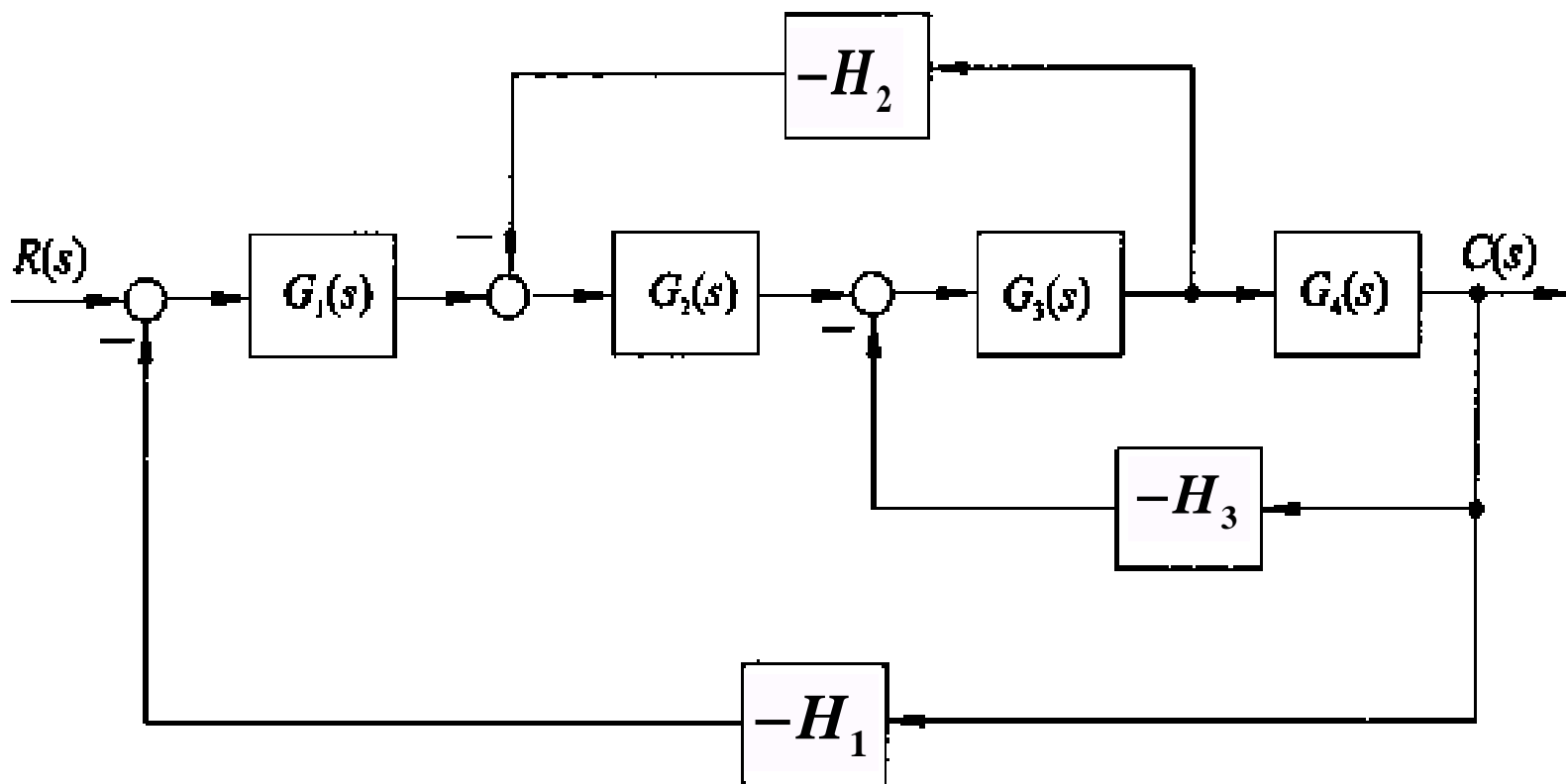
例2-20 试用梅森公式求例2-17系统的传递函数。



$$\frac{C(s)}{R(s)} = P_{RC} = \frac{1}{\Delta} p_1 \Delta_1 = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3}$$

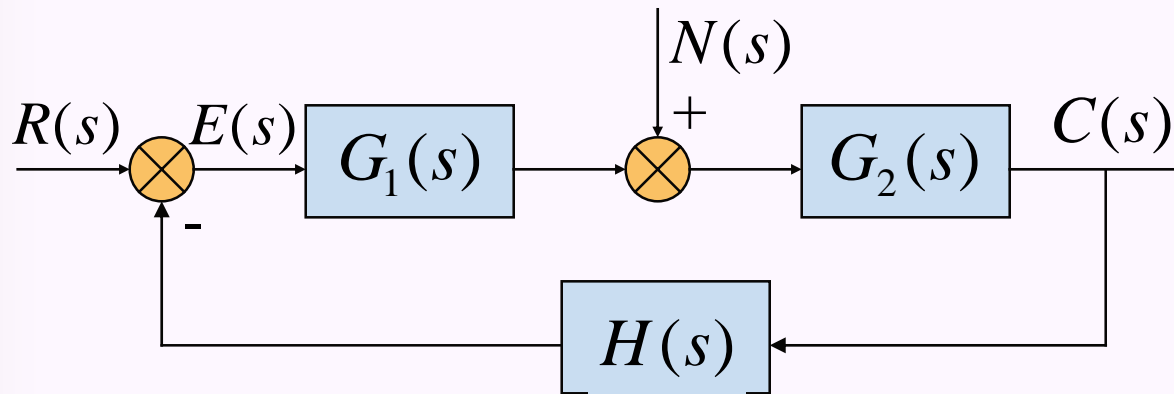
信号流图也可直接在结构图中应用

例2-20 试用梅森公式求例2-17系统的传递函数。

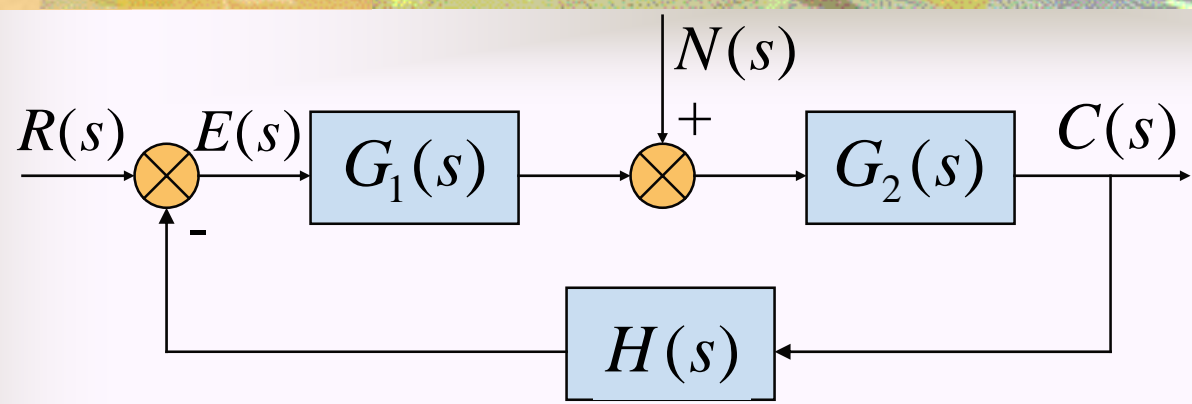


三、闭环系统的传递函数：

闭环控制系统的典型结构图如下图所示：



图中， $R(s)$ 、 $C(s)$ 为输入、输出信号， $E(s)$ 为系统的偏差或误差， $N(s)$ 为系统的扰动量。



1.开环传函

$$G_K(s)$$

2.给定闭环传函

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

3.扰动闭环传函

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

4.给定误差传函

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

5.扰动误差传函

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)}$$



作业

- 课本P75
- 2-14 (a)
- 2-15 (a)