

第四章 线性系统的根轨迹法

4-1 根轨迹法的基本概念



4-2 绘制根轨迹的基本法则



4-3 广义根轨迹法

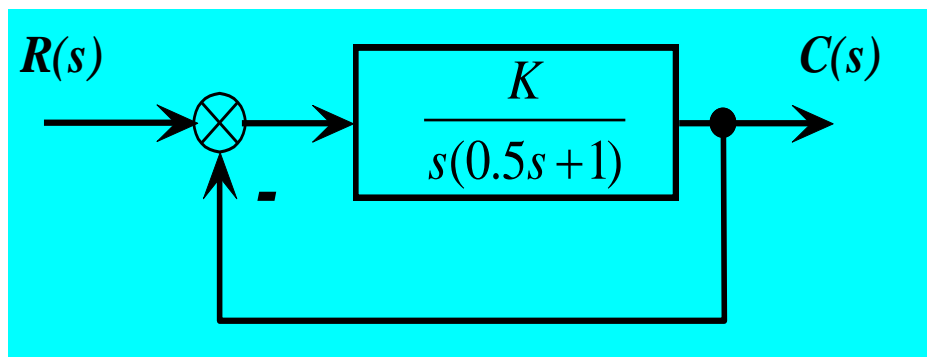


4-1 根轨迹法的基本概念

1. 根轨迹的概念

根轨迹是**开环系统**的某一参数从零变化到无穷时，**闭环系统**特征方程式的根在s平面上变化的轨迹。

例：随K的变换
绘制闭环根轨迹。



特征方程：

$$\therefore D(s) = s^2 + 2s + 2K = 0$$



$$G_k(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)}$$

特征根：

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}$$

$$s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$

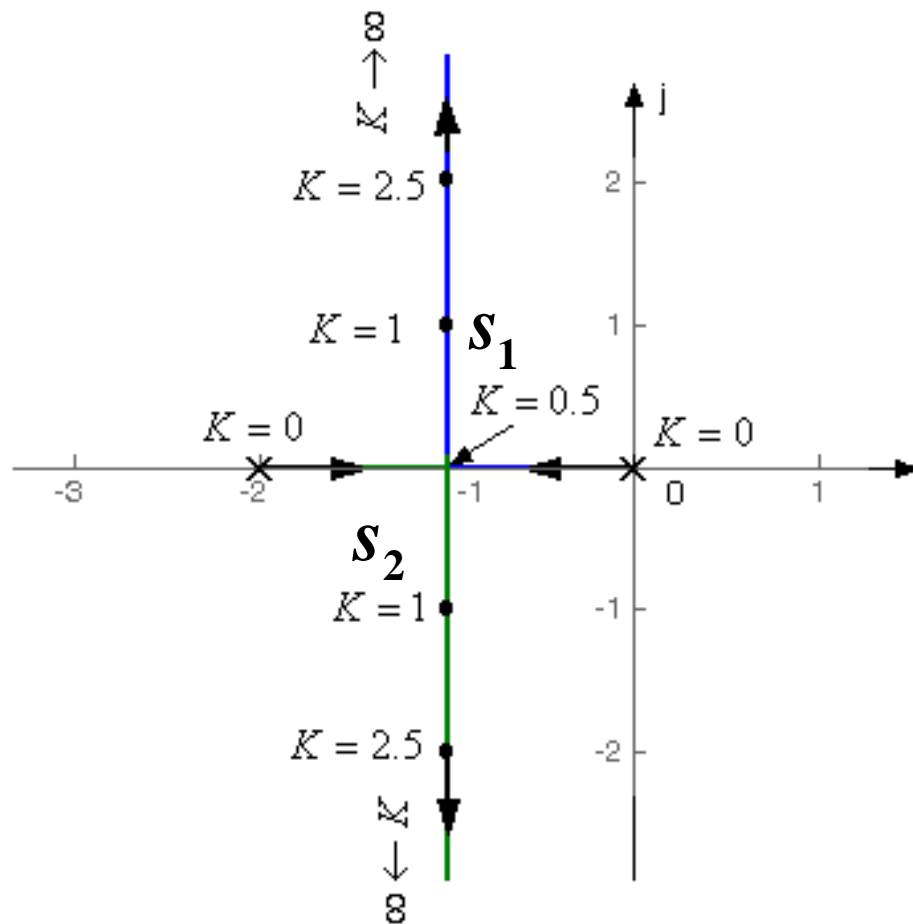
令 K （由0到 ∞ ）变动， s_1 、 s_2 在 s 平面的移动轨迹即为根轨迹。

2.系统性能分析：

1) 稳定性

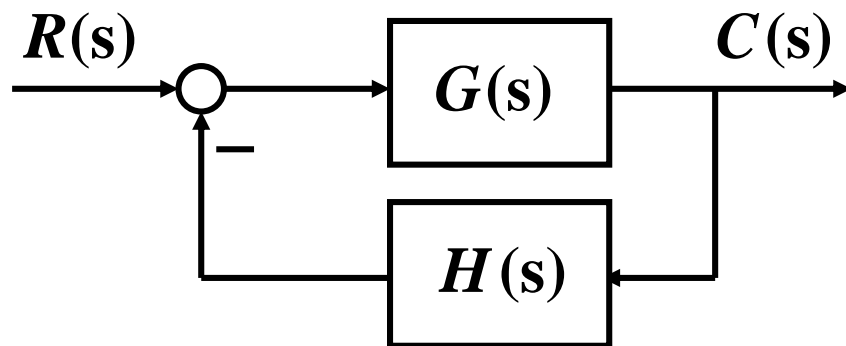
2) 动态性能

3) 稳态误差



临界开环增益
根轨迹增益

3. 闭环零极点与开环零极点间的关系



设

$$G(s) = K_G^* \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_{gi})}{\prod_{i=1}^q (s - p_{gi})}$$

$$H(s) = K_H^* \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_{hj})}{\prod_{j=1}^x (s - p_{hj})}$$



则开环传递函数为

$$G_k(s) = K_G^* K_H^* \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_{gi}) \prod_{j=1}^l (s - z_{hj})}{\prod_{i=1}^q (s - p_{gi}) \prod_{j=1}^x (s - p_{hj})}$$

则闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^f (s - z_{gi}) \prod_{j=1}^x (s - p_{hj})}{\prod_{i=1}^q (s - p_{gi}) \prod_{j=1}^x (s - p_{hj}) + K_G^* K_H^* \prod_{i=1}^f (s - z_{gi}) \prod_{j=1}^l (s - z_{hj})}$$



- **小结**

- **闭环根轨迹增益**等于前向通道根轨迹增益。
 - **闭环零点**由前向通道传函的零点和反馈通道传函的极点构成。
 - **单位反馈时**，闭环根轨迹增益就等于开环根轨迹增益,闭环零点就是开环零点。
 - **闭环极点**与开环零极点和根轨迹增益均有关系。
- **根轨迹法的基本任务**：如何由开环零极点和根轨迹增益通过图解的方法找出闭环极点。



4.根轨迹方程

系统特征方程

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(s)H(s) = -1$$

它是复变量方程, 亦为向量方程。

模值条件: $|G(s)H(s)| = 1$

相角条件: $\angle G(s)H(s) = (2k + 1)\pi$
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



$$\text{令 } G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

模值条件可写为

$$K^* = \frac{\prod_{j=1}^n |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

相角条件可写为

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



4-2 常规根轨迹的绘制法则

1. 基本绘制法则

法则1 根轨迹的起点和终点。

起始于开环极点，终止于开环零点。

$$\text{令 } G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$



$$\text{特征方程: } \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

$$\text{起点: } K^* = 0 \Rightarrow s = p_i$$

$$\text{终点: } K^* \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow z_j, s \rightarrow \infty$$

一般, $m \leq n$, 有 $n-m$ 条根轨迹终止于无穷远处。

同理, 当 $m > n$ 时, 有 $m-n$ 条根轨迹起始于无穷远处。



法则2 根轨迹的分支数、对称性和连续性。

根轨迹分支数= $\max(m,n)$ ，根轨迹是连续的，并且对称于实轴。

例如：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)}$$

$$\therefore D(s) = s^2 + 2s + 2K = 0$$

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}$$

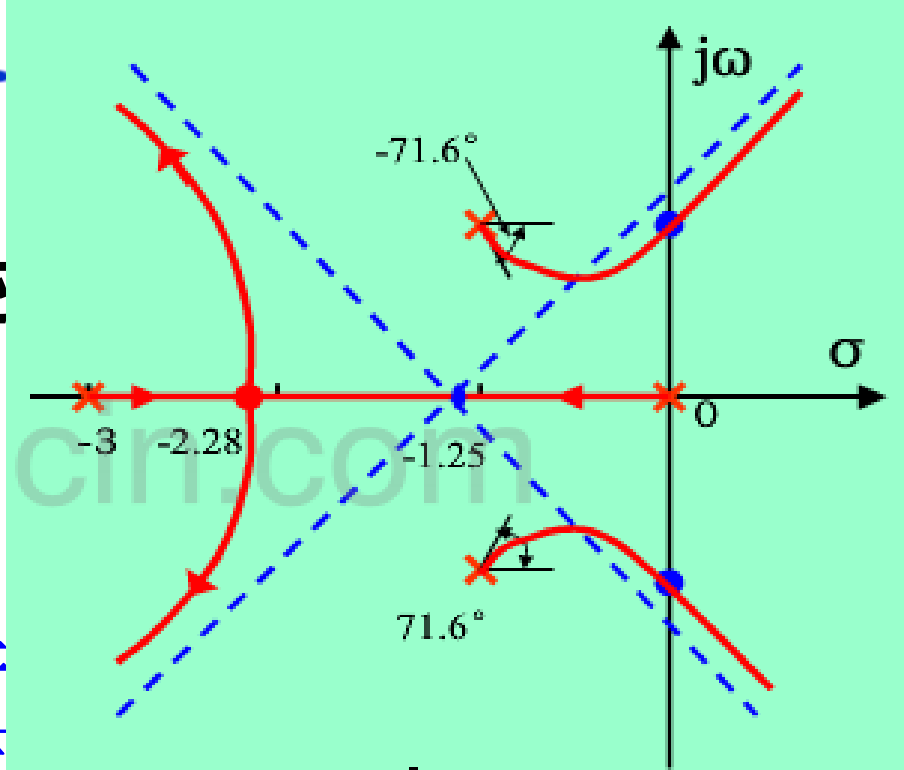
$$s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$



法则3、根轨迹的渐近线

当 $n > m$ 时，有 $n - m$ 条根轨迹渐近线与实轴交点和夹角为：

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{\sum \text{开环极点} - \sum \text{开环零点}}{n - m} \\ \varphi_a &= \frac{(2k + 1)\pi}{n - m} \\ k &= 0, 1, \dots, n - m - 1 \end{aligned} \right.$$



1. 渐近线关于实轴对称。
2. 渐近线是 $n - m$ 条与实轴交于 σ_a 的射线。



图4-5: 已知 $G_k = \frac{K^*(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$, 根据已学的三个基本法则, 确定绘制根轨迹的有关数据.

解: $n=4, m=1$, 故有4条根轨迹分支, 分别起始于

$$p_1 = 0, p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j, p_4 = -4.$$

有一条终止于 $z_1 = -1$, 有 $n-m=3$ 条终止于无穷远处。即有3条渐近线。



$$G_k = \frac{K^* (s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)},$$

渐近线与实轴交点：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{[0+(-1+j)+(-1-j)+(-4)] - (-1)}{4-1} = -\frac{5}{3}$$

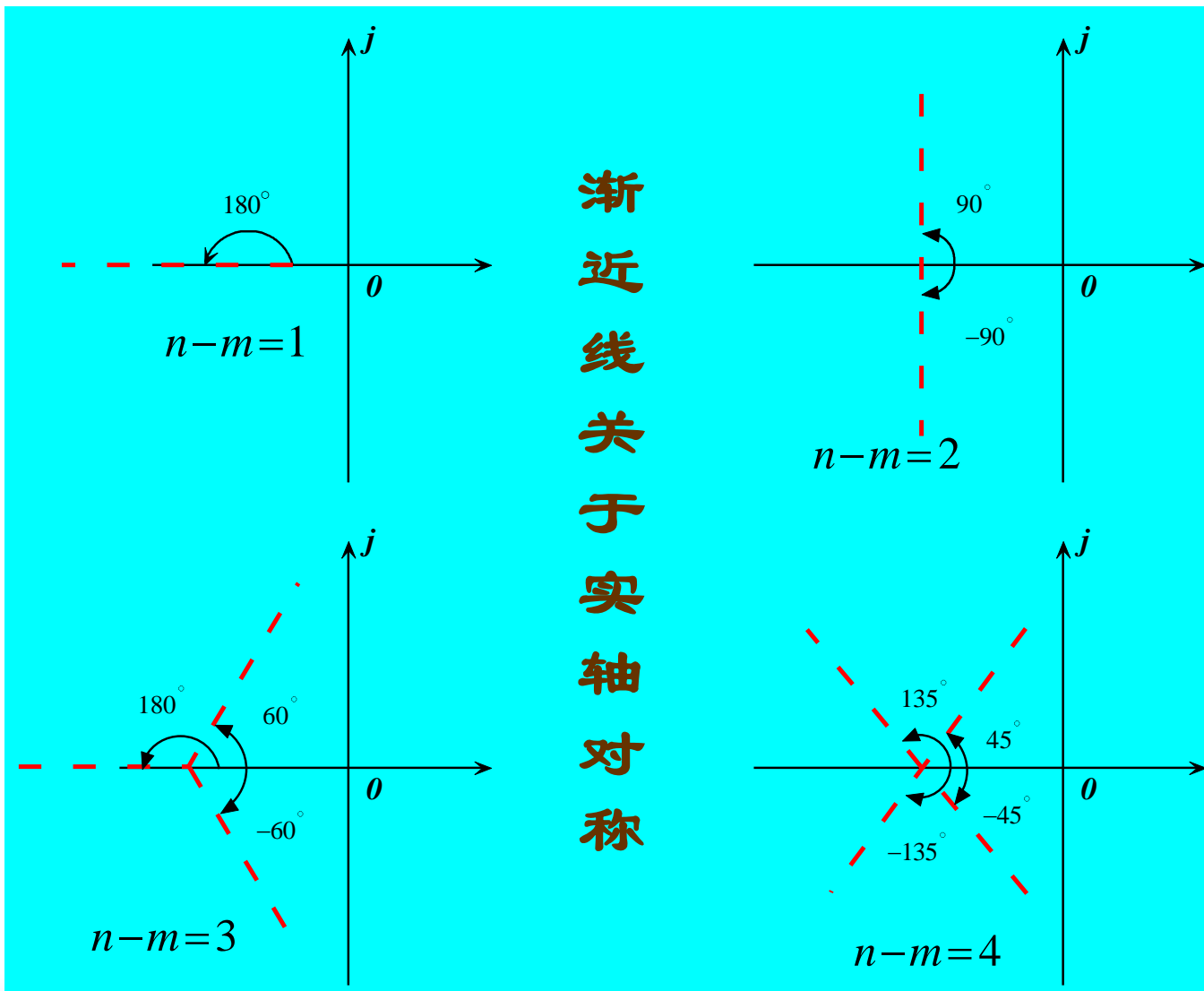
渐近线与实轴夹角：

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ \quad (k=0,1,2)$$



常见 $n-m=1,2,3,4$ 时渐近线的图像:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$



法则4、根轨迹在实轴上的分布

实轴上某一区域，其右边开环实数零极点个数之和为奇数，该区域为根轨迹区域。

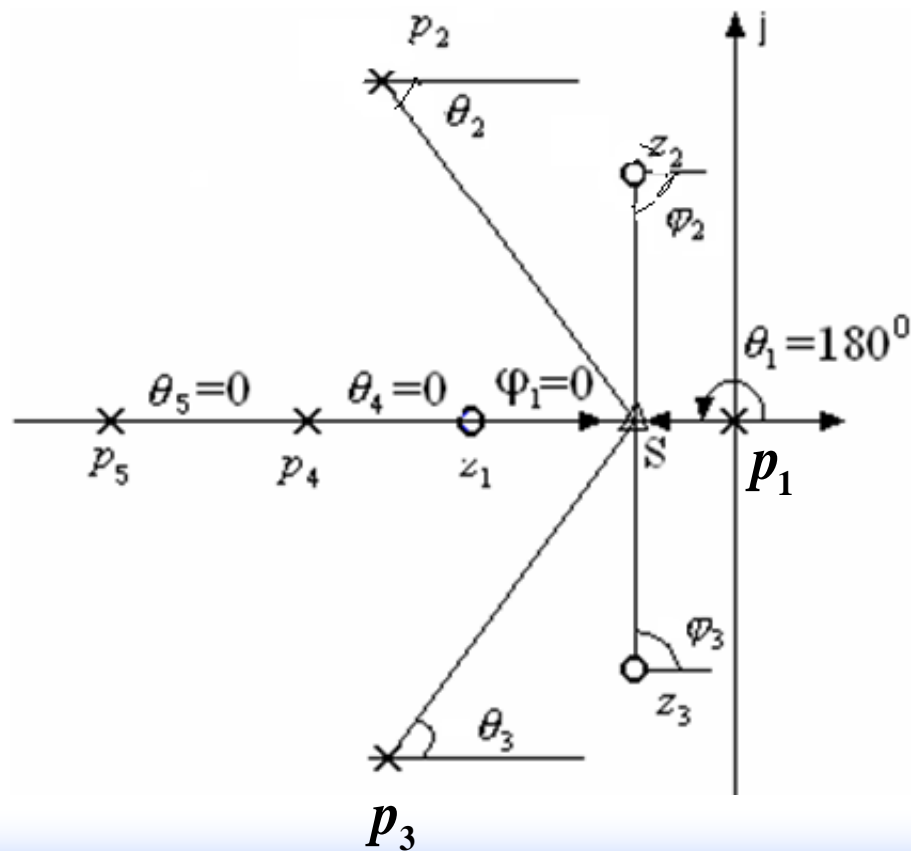
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$-[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5]$$

$$= 0^\circ + 0^\circ$$

$$-[180^\circ + 0^\circ + 0^\circ + 0^\circ]$$

$$= -180^\circ$$



法则5、根轨迹的分离点与分离角

若干根轨迹在复平面上相遇后又分开的点称为分离点。

分离点坐标d的求解：

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

分离角定义为根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角。 (P146例4-1上方)

分离角：
$$\frac{(2k + 1)\pi}{l} \quad (k = 0, 1, \dots, l - 1)$$



分离点的实质是特征方程出现重根。

证明：由重根条件得

$$D(s) = K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) + \prod_{j=1}^n (s - p_j) = 0$$

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) + \prod_{j=1}^n (s - p_j) \right] = 0$$

解得

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i}$$

若无开环零点，则： $\sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} = 0$

(P147中间有解释)



说明

- **分离点是根轨迹上的点。**
- **分离点关于实轴对称，常见的为实轴上的分离点。**
- **一般说来，若实轴上两相邻开环极点之间或相邻开环零点是根轨迹，则其间必有分离点；**



例4-1: 单位反馈系统的开环传递函数为： $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$

试绘制闭环系统的根轨迹

解:

1、开环零点 $z_1=-1$ ，开环极点 $p_1=0$ ， $p_2=-2$ ， $p_3=-3$ ，根轨迹分支数为3条，有两条渐近线。

2、实轴上根轨迹为 $[-3, -2]$ ， $[-1, 0]$

3、求渐近线:

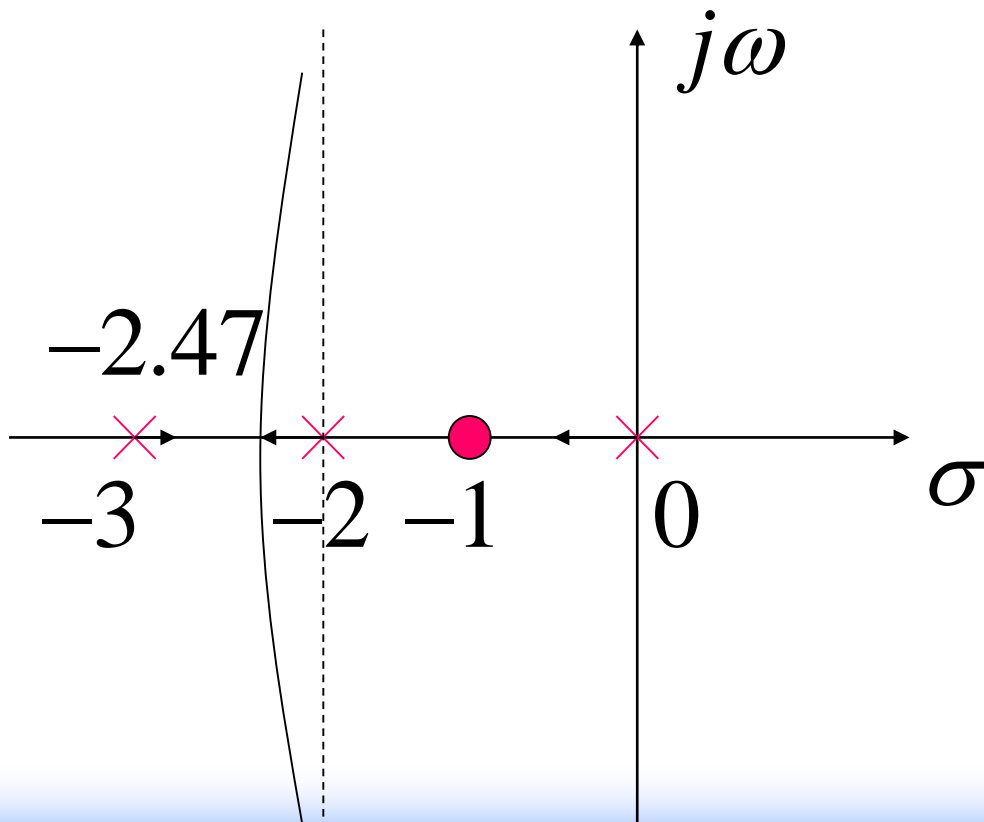
渐近线与实轴夹角为： $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{3-1}, \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

渐近线与实轴交点为： $\sigma = \frac{0-2-3+1}{3-1} = -2$



4、求分离点:

$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} \Rightarrow d = -2.47$$

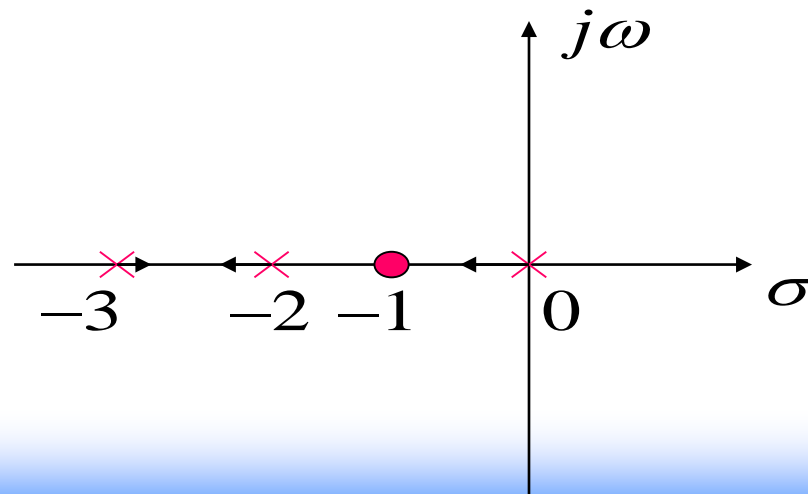


补：试探法求方程的解

- 方程 $P(d)=0$ ，先找一试探点如 $d=d_1$ 则
- $P(d)/(d-d_1)=Q(d)\dots\dots r_1$
- $Q(d)/(d-d_1)=M(d)\dots\dots r_2$
- 方程 $P(d)=0$ 的近似解为 $d=d_1-r_1/r_2$.

例4-1 $\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} \Rightarrow P(d) = d^3 + 4d^2 + 5d + 3 = 0$

试探点为： $d_1=-2.5$



$$p(d) = d^3 + 4d^2 + 5d + 3 = 0, \quad d_1 = -2.5$$

$$d + 2.5 \overline{) d^3 + 4d^2 + 5d + 3} = Q(d)$$

$$\begin{array}{r} d^3 + 2.5d^2 \\ \hline 1.5d^2 + 5d \\ 1.5d^2 + 3.75d \\ \hline 1.25d + 3 \\ 1.25d + 3.125 \\ \hline -0.125 = r_1 \end{array}$$

$$d + 2.5 \overline{) d^2 + 1.5d + 1.25} = \frac{d - 1}{d^2 + 2.5d}$$

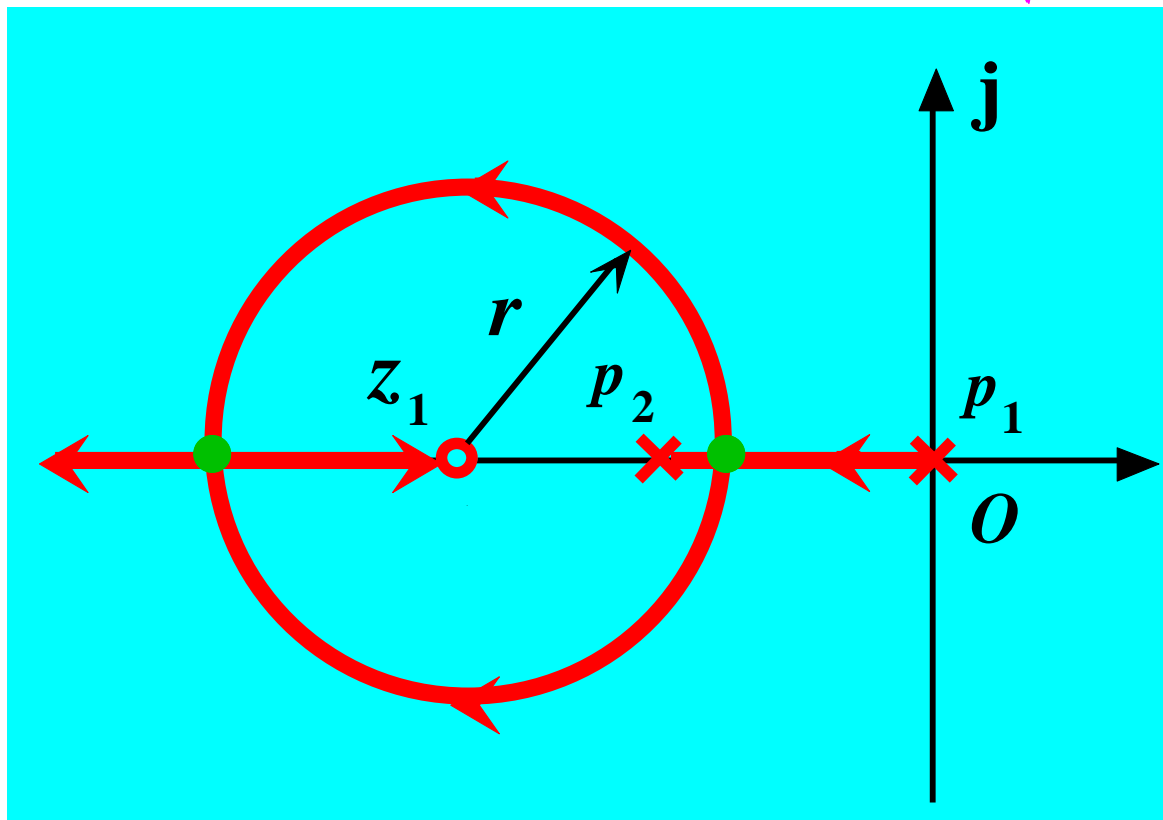
$$\begin{array}{r} d^2 + 2.5d \\ \hline -d + 1.25 \\ -d - 2.5 \\ \hline 3.75 = r_2 \end{array}$$

近似解 $d = d_1 - \frac{r_1}{r_2} = -2.5 - \frac{-0.125}{3.75} = -2.47$



结论：当系统仅有两个开环极点 p_1 、 p_2 和一个开环零点 z_1 时，其根轨迹要么是直线要么是圆弧；且圆弧的圆心在零点，半径为

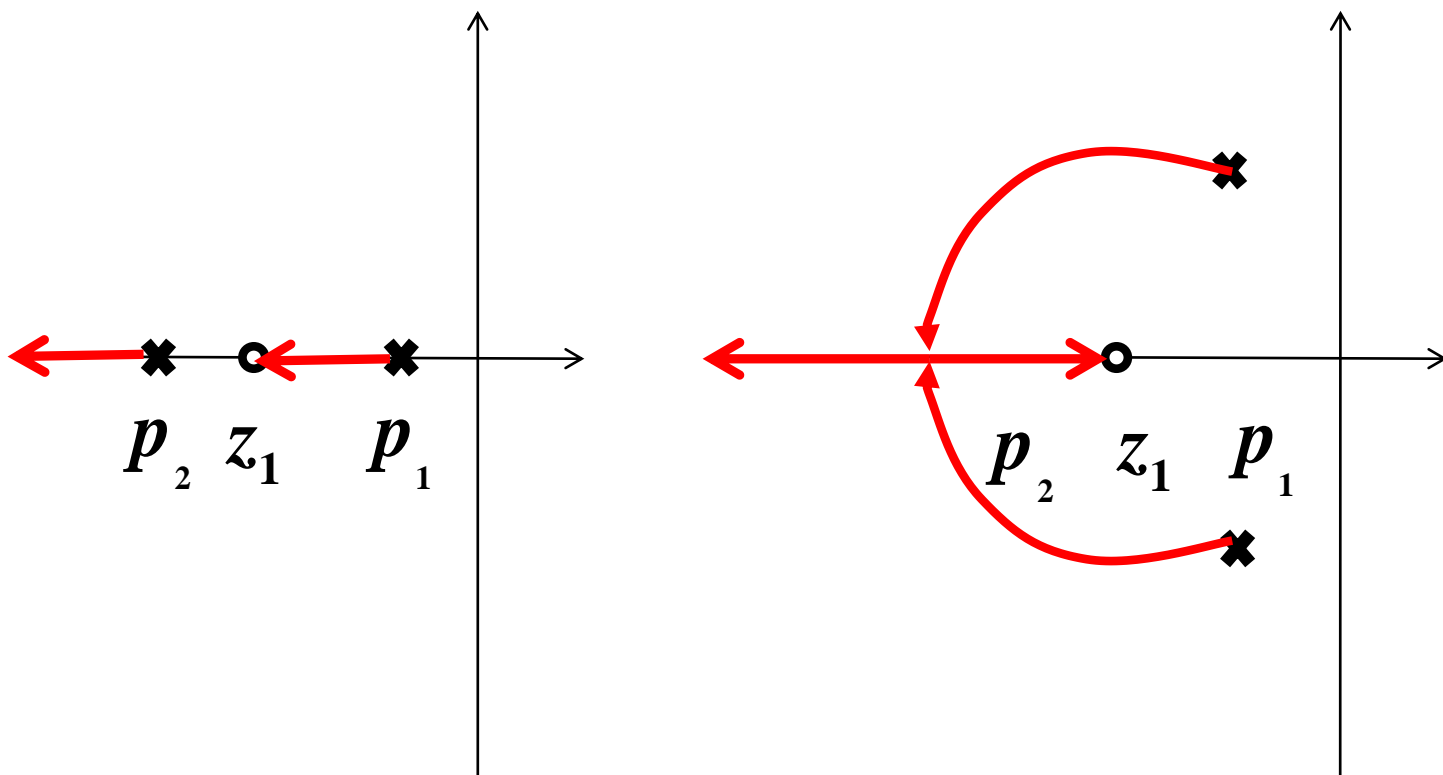
$$\sqrt{|p_1 - z_1| \cdot |p_2 - z_1|}$$



P147
图4-8
的左侧

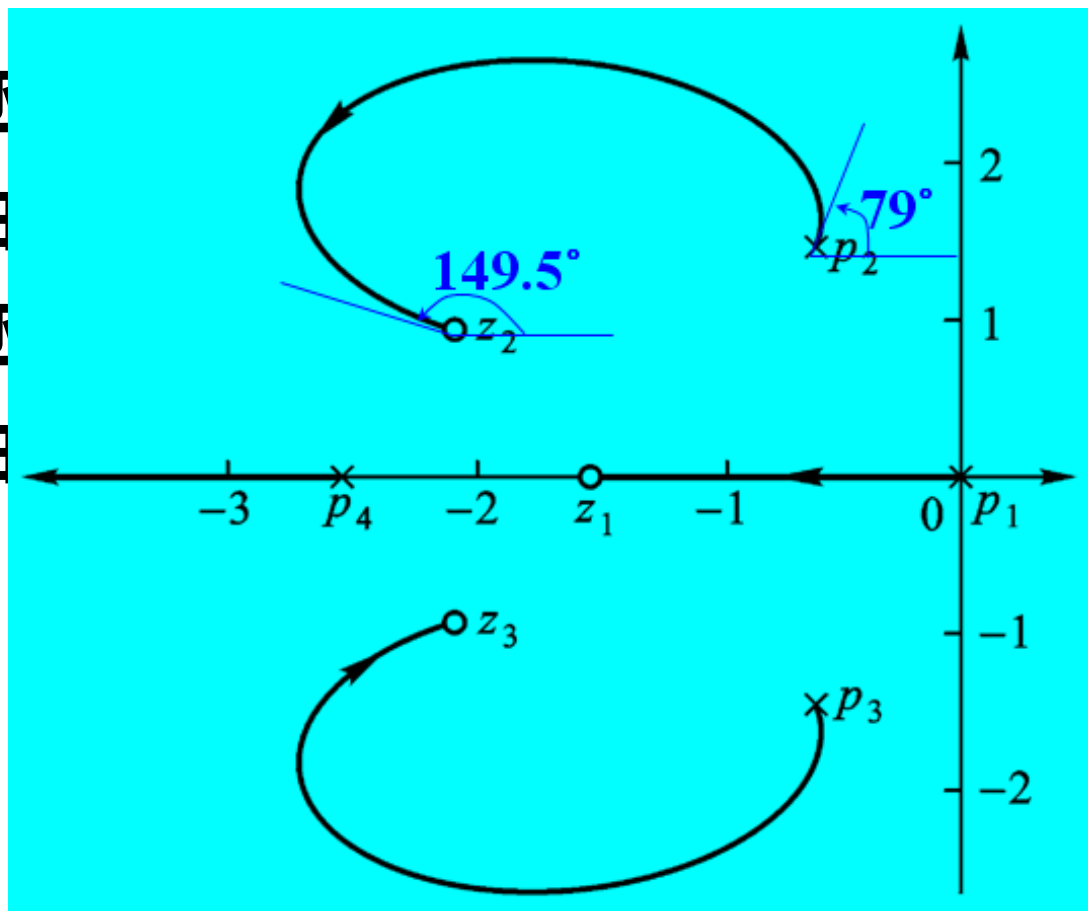
当零点位于极点之间时，无复平面上的圆弧。

自动控制原理



法则6、根轨迹的起始角和终止角

根轨迹
正实轴
根轨迹
正实轴



上切线与
上切线与

共轭复数开环零极点对应的起始角/终止角，大小相等，符号相反。



起始角的计算公式:

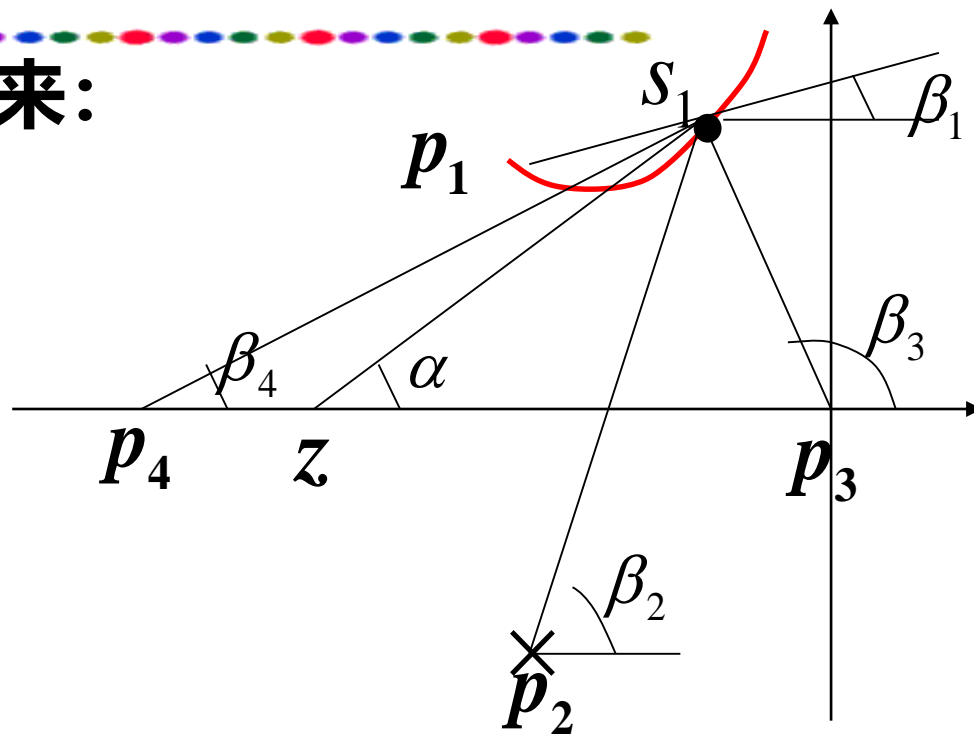
$$\theta_{p_k} = (2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^n \angle(p_k - p_i)$$

终止角的计算公式:

$$\theta_{z_k} = (2k + 1)\pi + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ \neq k}}^m \angle(z_k - z_j)$$



公式的由来:



s_1 是根轨迹上的点，故满足相角条件。

$$\alpha - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 = (2k + 1)\pi$$

当 $s_1 \rightarrow p_1$ 时， β_1 即为 p_1 处的起始角。

$$(2k + 1)\pi + \alpha - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 = \beta_1$$

法则7 根轨迹与虚轴的交点

与虚轴的交点为系统临界稳定点，此处的根轨迹增益为临界根轨迹增益。

求法：

(1) 将 $s=j\omega$ 代入特征方程，令对应实部虚部均为0，解出 ω 和 K^* ；

(2) 利用劳斯判据，由全0行求出 K^* ，由辅助方程求出 ω 。



例4-4 已知系统开环传函为 $G_k = \frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

试绘制闭环系统的概略根轨迹。

解 (1) 系统有4个开环极点： $p_1=0, p_2=-3, p_{3,4}=-1\pm j$
 无开环零点, 即 $n=4, m=0$, 有4条根轨迹分支。

(2) 实轴上的根轨迹区域为 $[-3 \ 0]$

(3) $n-m=4$, 故有4条渐近线, 其交点和夹角分别为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n (p_j) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n-m} = \frac{0 + (-3) + (-1+j) + (-1-j)}{4-0} = -1.25$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1) \times 180^\circ}{4-0} = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$



(4) 根轨迹在实轴上的分离

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{s+1-j} = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = -2.28; s_{2,3} = -0.73 \pm j0.7$$

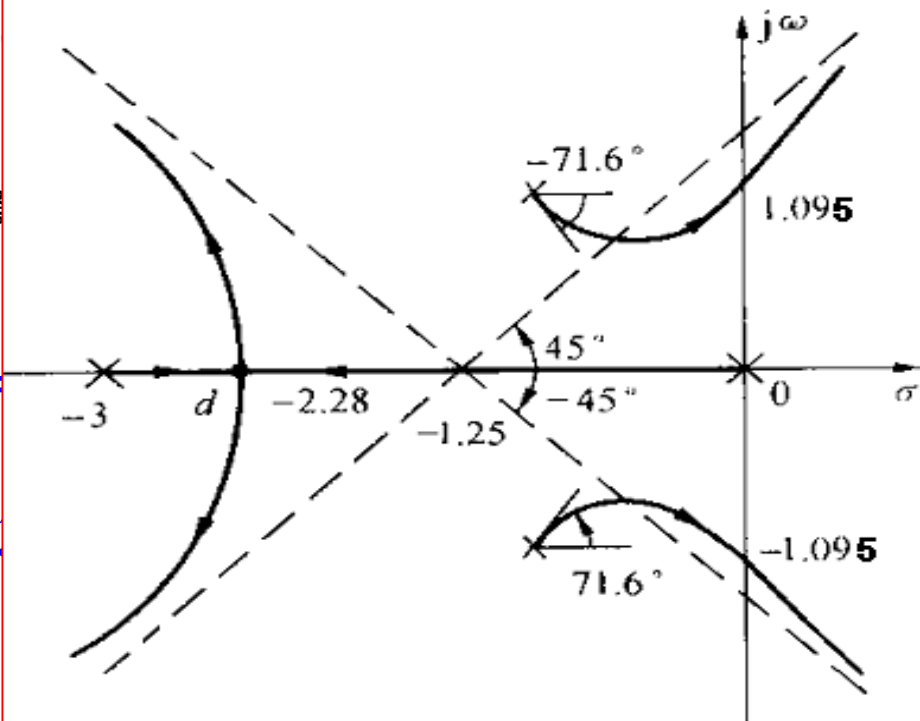


图 4-12 四阶系统的根轨迹

(5) 根轨迹在开环极点 $p_3 p_4$

$$\theta_{p_3} = 180^\circ + 0^\circ - (135^\circ + 26.6^\circ + 90^\circ) = -71.6^\circ, \theta_{p_4} = 71.6^\circ$$

(6) 根轨迹与虚轴之交点

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K^* = 0 \xrightarrow{s=j\omega}$$

$$(\omega^4 - 8\omega^2 + K^*) + j(-5\omega^3 + 6\omega) = 0$$

令实部虚部等于0得: $\omega_{1,2} = \pm 1.1, K^* = 8.16$



法则8、根之和

设系统开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

则系统闭环特征方程在 $n > m$ 时可表示为

$$\begin{aligned} K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) + \prod_{i=1}^n (s - p_i) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \\ &= \prod_{i=1}^n (s - s_i) \\ &= s^n + \left(-\sum_{i=1}^n s_i\right) \cdot s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n (-s_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$



当 $n-m \geq 2$ 时，特征方程的第二项系数与 K^* 无关，完全取决于开环极点部分，可得

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i = \text{常数}$$

在 $n-m \geq 2$ 时，可用来：

- (1) 已知 $n-1$ 个特征根，求第 n 个根。
- (2) K^* 增大时，判定根轨迹分支的走向。



2. 闭环极点的确定

例题4-5 单位反馈系统开环传递函数为

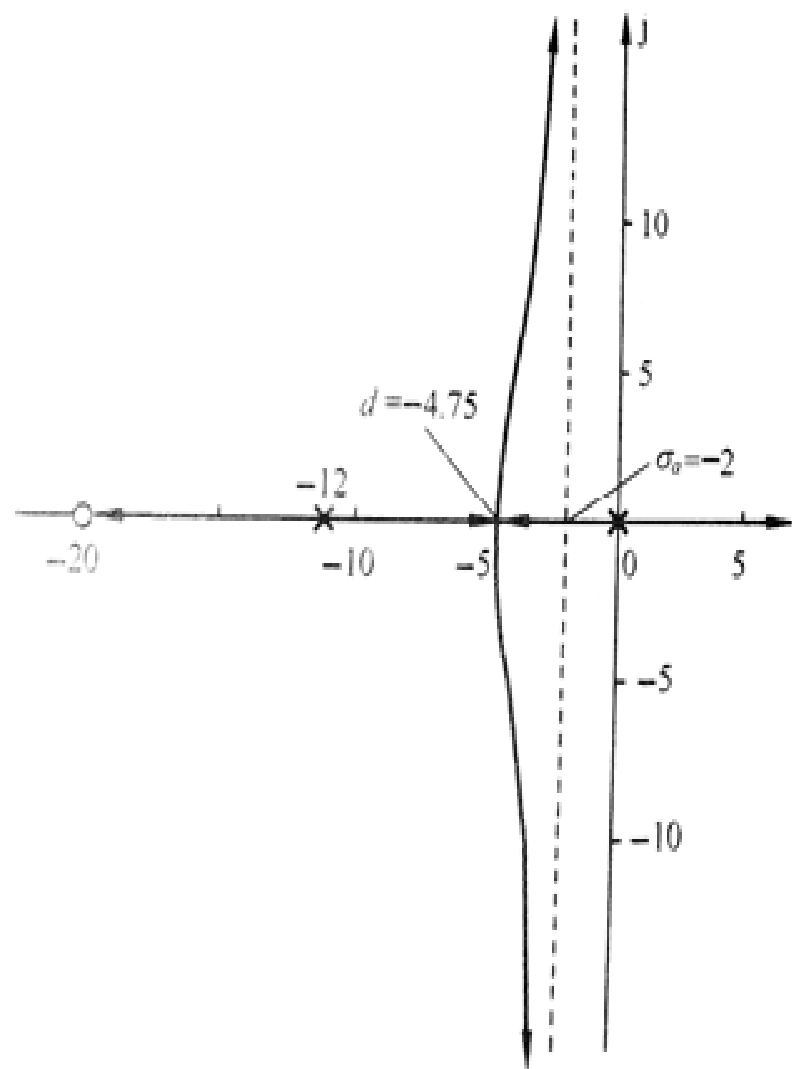
$$G(s) = \frac{K^*(s + 20)}{s(s^2 + 24s + 144)}$$

试画出 K^* 增大时的系统概略根轨迹图，求出使系统输出响应产生振荡的 K^* 的取值范围。

解：系统开环传函可化为

$$G(s) = \frac{K^*(s + 20)}{s(s + 12)^2}$$





解 由开环传递函数

$$G(s) = \frac{K^* (s + 20)}{s(s + 12)^2}$$

令 K^* 从 $0 \rightarrow \infty$, 可画出系统概略根轨迹如图 4-13 所示。图中

渐近线: $\sigma_a = -2, \quad \varphi_a = \pm 90^\circ$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{2}{d+12} = \frac{1}{d+20}$
 $d = -4.75$

图 4-13 空间站方位控制系统概略根轨迹图

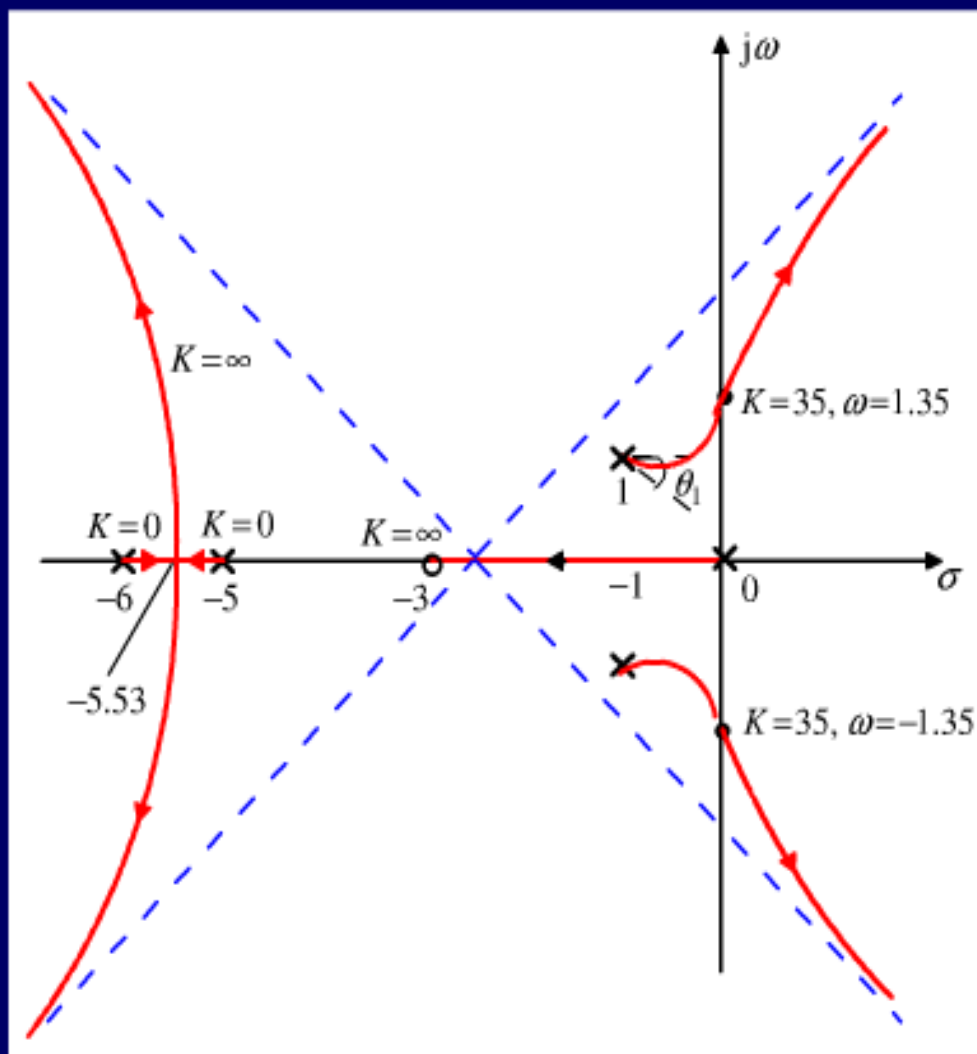
设控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$= \frac{K^* (s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

! 绘制注意点

- 1) 实轴、虚轴相同的刻度
- 2) “x”、“o”
- 3) 加粗线及箭头
- 4) 关键点的标注



4-3 广义根轨迹法

- 常规根轨迹：以 K^*/K 为可变参数的根轨迹。
- 广义根轨迹：除常规根轨迹外的根轨迹。
- 参数根轨迹：以**非** K^*/K 为可变参数的根轨迹。



1. 参量根轨迹

例4-6 已知系统结构图如下，试绘出参量 τ 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹。

解 系统开环传函为：

$$G_K(s) = \frac{5(\tau s + 1)}{s(5s + 1)}$$

系统特征方程为：

$$1 + G_K(s) = 0 \Rightarrow 5(\tau s + 1) + s(5s + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (5s^2 + s + 5) + 5\tau s = 0 \Rightarrow 1 + \frac{5\tau s}{5s^2 + s + 5} = 0$$

得等效开环传函为：

$$G'_K(s) = \frac{5\tau s}{5s^2 + s + 5}$$

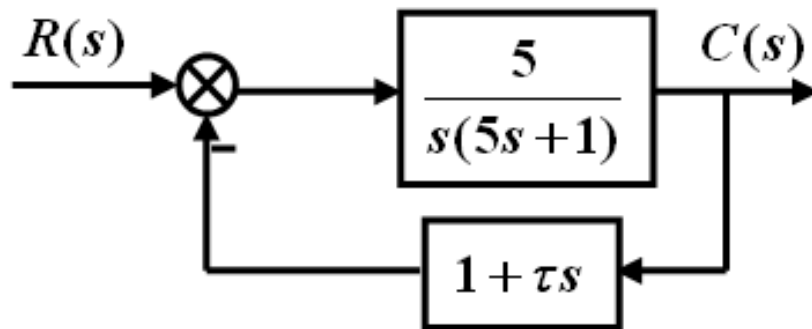


图4-16(c) 系统III



得等效开环传函为：

$$G'_K(s) = \frac{5\tau s}{5s^2 + s + 5} = \tau \cdot \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

等效开环传函有两个极点、一个零点

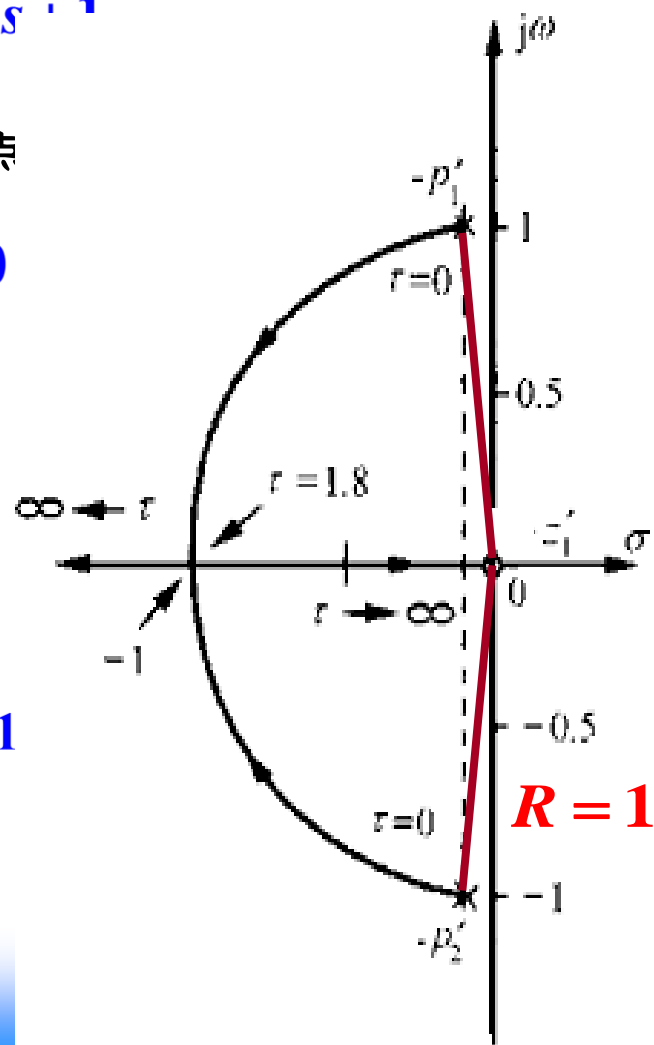
$$p'_{1,2} = -0.1 \pm j0.995 ; z'_1 = 0$$

实轴上的根轨迹区域为： $(-\infty, 0)$

平面上的根轨迹为圆弧，圆心 $(0,0)$ ，

$$R = \sqrt{(-0.1)^2 + (0.995)^2} = 1$$

则 τ 的参量根轨迹如图所示。



参量根轨迹的绘制步骤总结:

第一步，得出等效开环传函；

(1) 列出原系统的特征方程。 $1 + A \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$

(2) 对特征方程中的项分组，以不含参量的项去除特征方程，得到系统的等效开环传函，参量位于等效根轨迹增益的位置。

第二步，根据常规根轨迹的绘制方法，绘制参量根轨迹。



作业

- P163
- 4-3(1)(2), 4-5(2), 4-10(1)



2、附加开环零点的作用

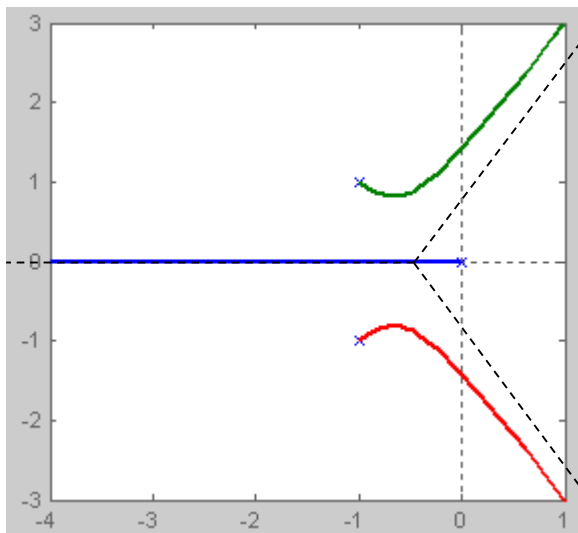
附加适当的开环零点可以改善系统的稳定性和动态性能。 设开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^* (s - z_1)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

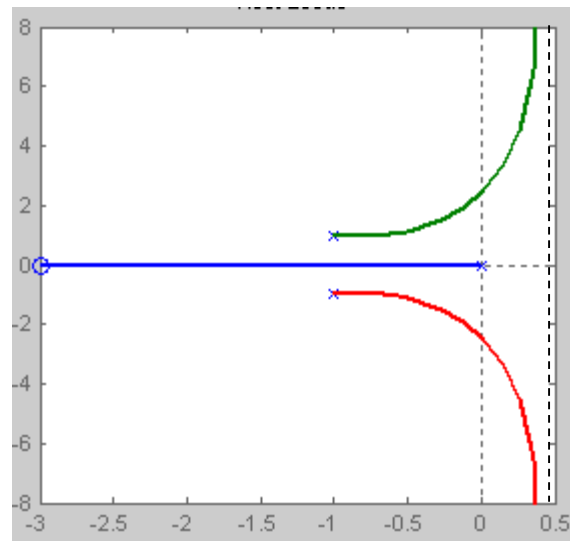
z_1 是附加的开环实数零点，其值可在s左半平面内任意选择，当 $z_1 \rightarrow \infty$ 时，表明不存在有限零点。



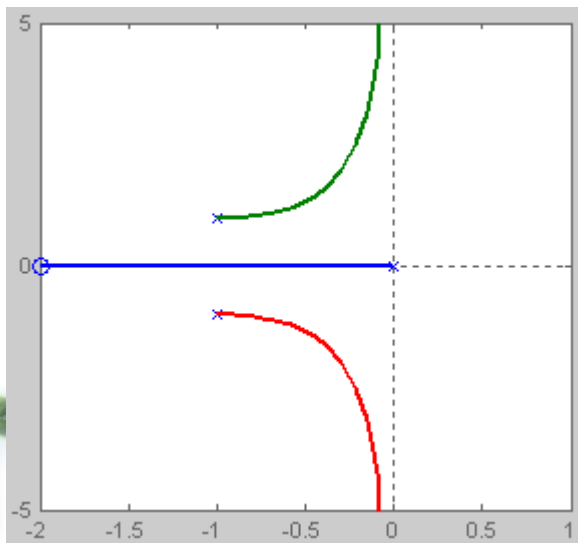
令 z_1 为不同的数值，对应的根轨迹如图所示：



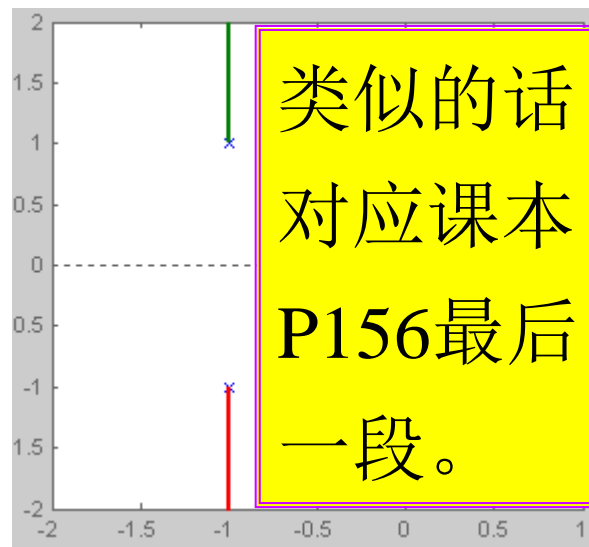
$z_1 \rightarrow \infty$



$z_1 = -3$



$z_1 = -2$



$z_1 = 0$

附加开环零点可使根轨迹左移。

而且，所加的零点越靠近虚轴影响越大。

开环极点对根轨迹的影响与开环零点的相反。

类似的话对应课本 P156 最后一段。



4-4 系统性能的分析

1. 主导极点与偶极子

$$\Phi(s) = \frac{2a}{a + \delta} \cdot \frac{s + a + \delta}{(s + a)(s^2 + 2s + 2)}$$

(1) 只要偶极子不十分接近原点，它们对系统性能的影响就甚微，可以忽略； $c(t) \approx 1 + \sqrt{2}e^{-t}\sin(t - 135^\circ)$

(2) 位于原点附近的偶极子可显著地影响系统的稳态值。

$$c(t) \approx 1 - \frac{\delta}{a} + \sqrt{2}e^{-t}\sin(t - 135^\circ)$$

剩下的内容均已讲过，大家再仔细阅读一遍！

