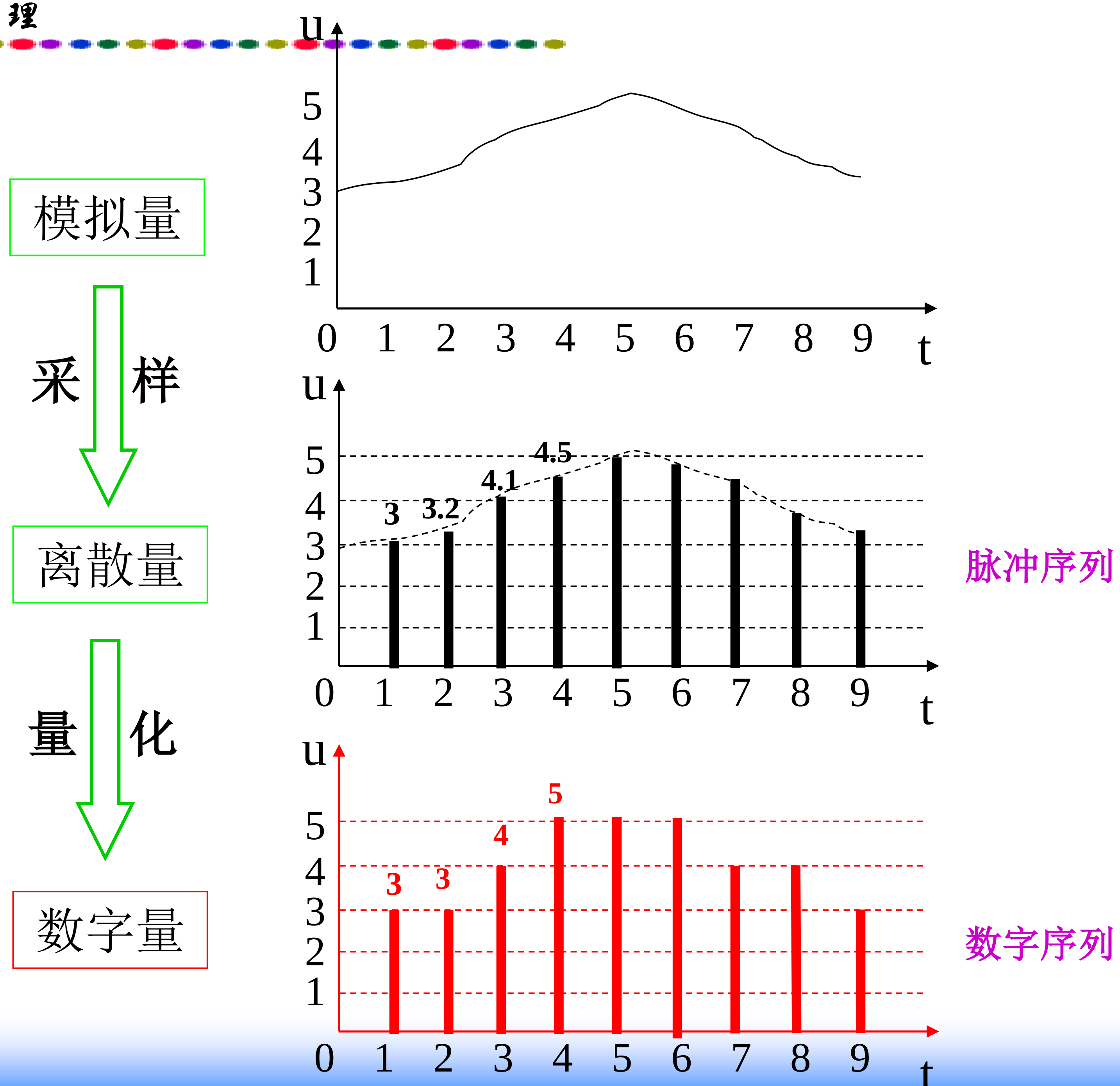
第七章 线性离散系统的分析

7-1 离散系统的基本概念

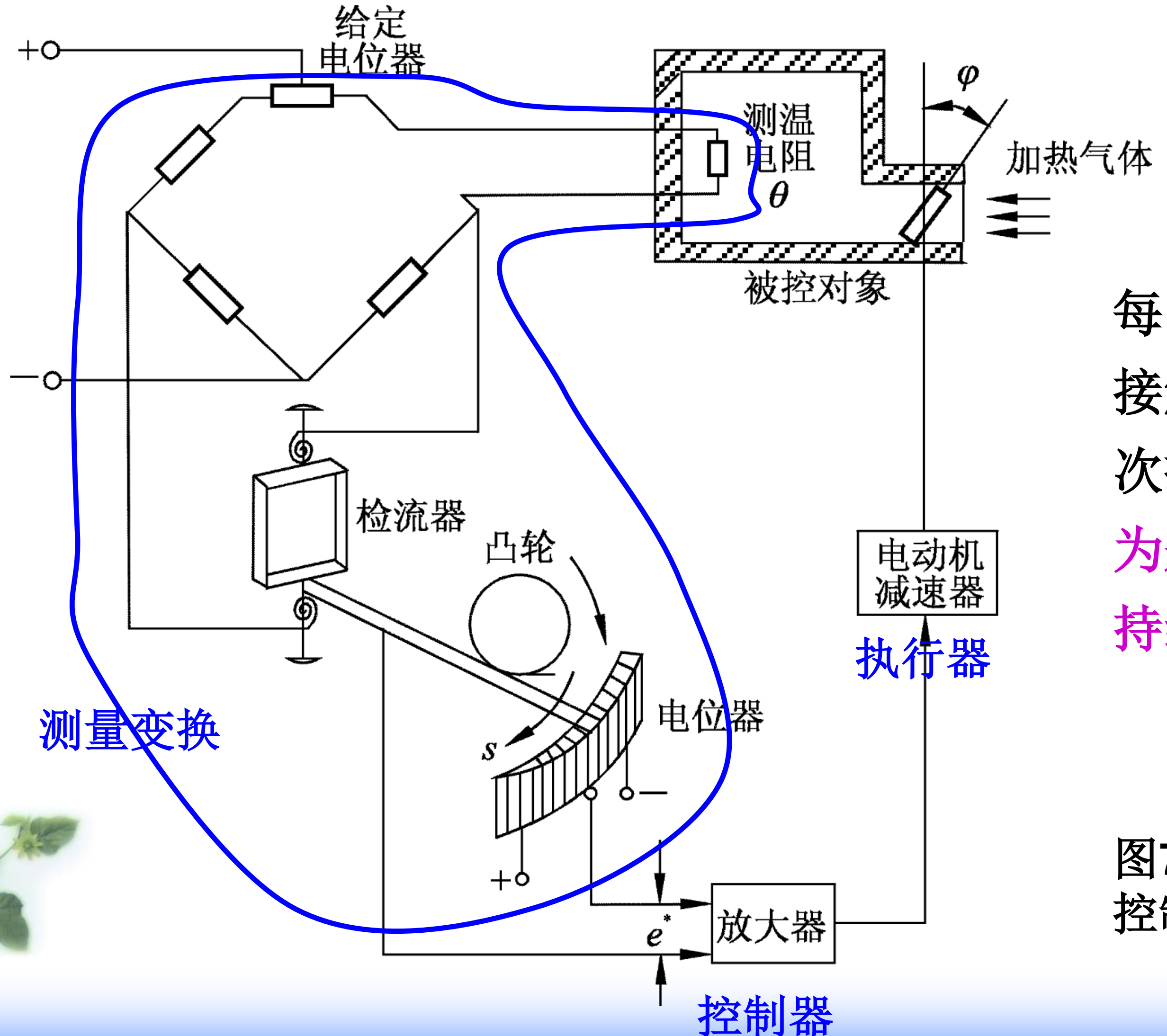
- 自动控制系统按其包含的信号形式通常可划分成一下几种类型：
  - 连续控制系统：连续信号
  - 离散控制系统：有一处或几处为离散信号（脉冲或数码）
    - 采样控制系统或脉冲控制系统：
      - 离散信号是脉冲序列形式
    - 数字控制系统或计算机控制系统：
      - 离散信号是数字序列形式



模拟量
采样
离散量
量化
数字量
u
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 t
3
3.2
4.1
4.5
脉冲序列
3
3
4
5
数字序列

1.采样控制系统

离散信号是脉冲序列（时间上离散）



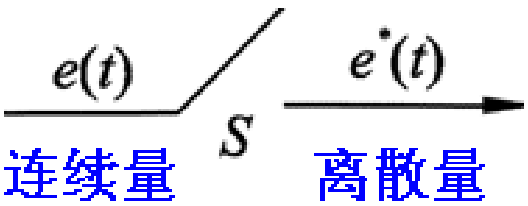
每隔时间T凸轮使指针接触电位器一次，每次接触时间为τ。则T为采样周期，τ为采样持续时间。

图7-1 炉温采样控制系统原理图

和连续控制系统相比，采样控制系统中的两个特殊环节是：采样器和保持器。

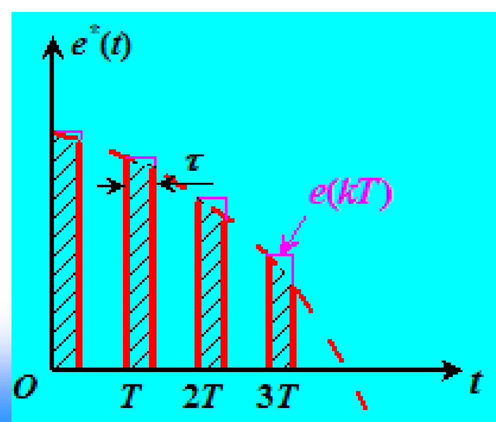
（1）信号采样和复现

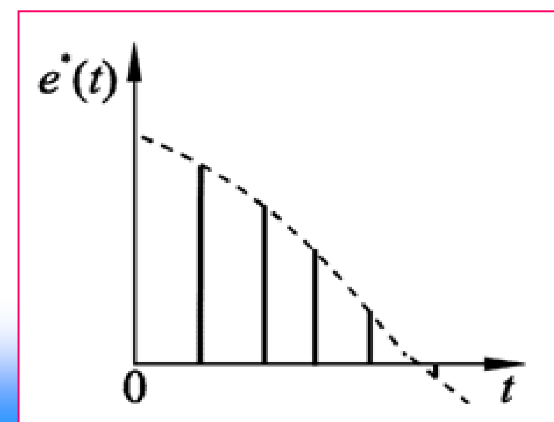
把连续信号变为脉冲序列的过程称为采样过程，简称采样。



实现采样的装置称为采样器，或采样开关。

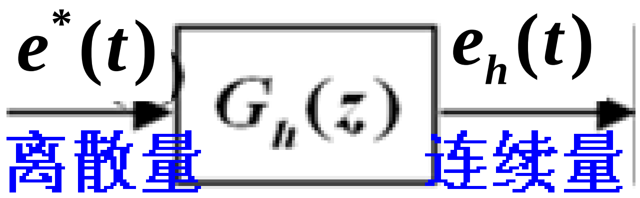
T表采样周期，τ表示采样持续时间；一般τ＜＜T，理想化为τ→0.

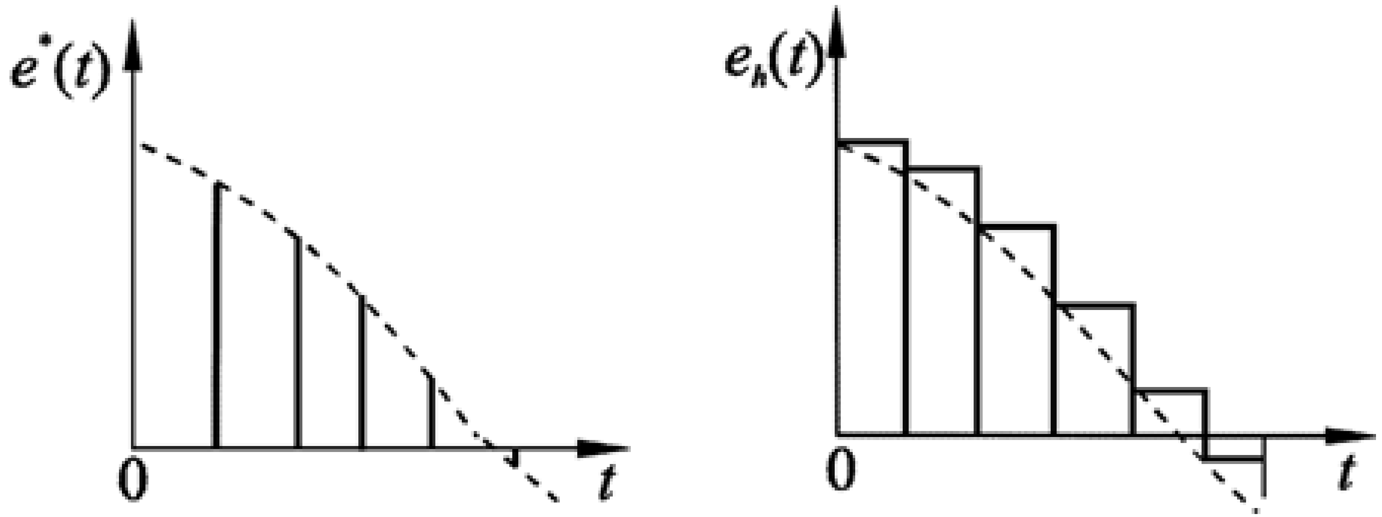




把脉冲序列转变为连续信号的过程称为信号复现过程。实现复现过程的装置称为保持器。

保持器可将脉冲信号复现为阶梯信号。





（2）采样系统的典型结构图

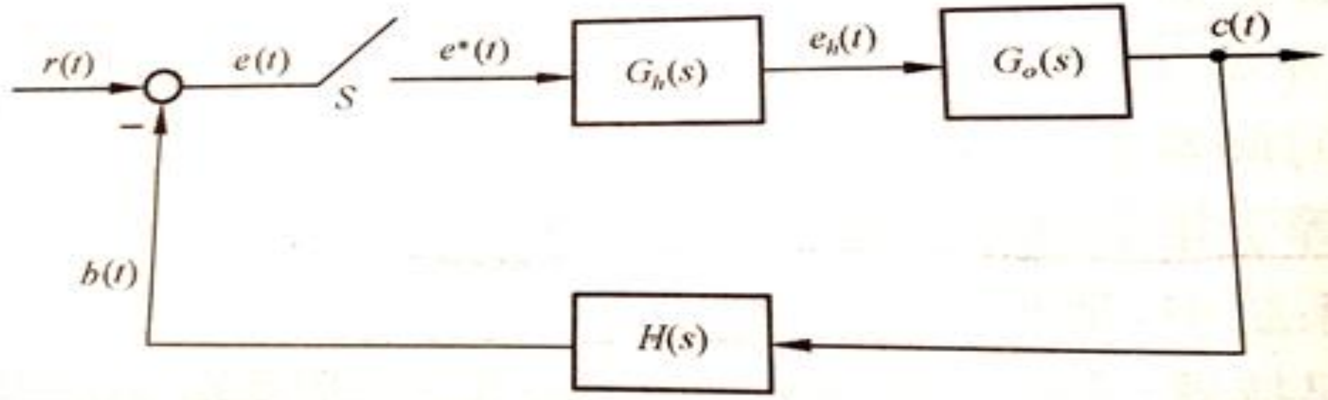


图 7-4　采样系统典型结构图

根据采样开关在系统中所处的位置不同，可以构成各种采样系统。

（1）**开环采样系统**：采样开关位于闭合回路之外，或系统本身不存在闭合回路。

（2）**闭环采样系统**：采样开关位于闭合回路之内。最常见的是误差采样控制的闭环采样系统。

（3）**线性采样开关**：e*(t)和e(t)的幅值具有线性关系。

（4）**线性采样系统**：采样开关和其余部分的传递函数都具有线性特性的系统。

4. 离散控制系统的研究方法

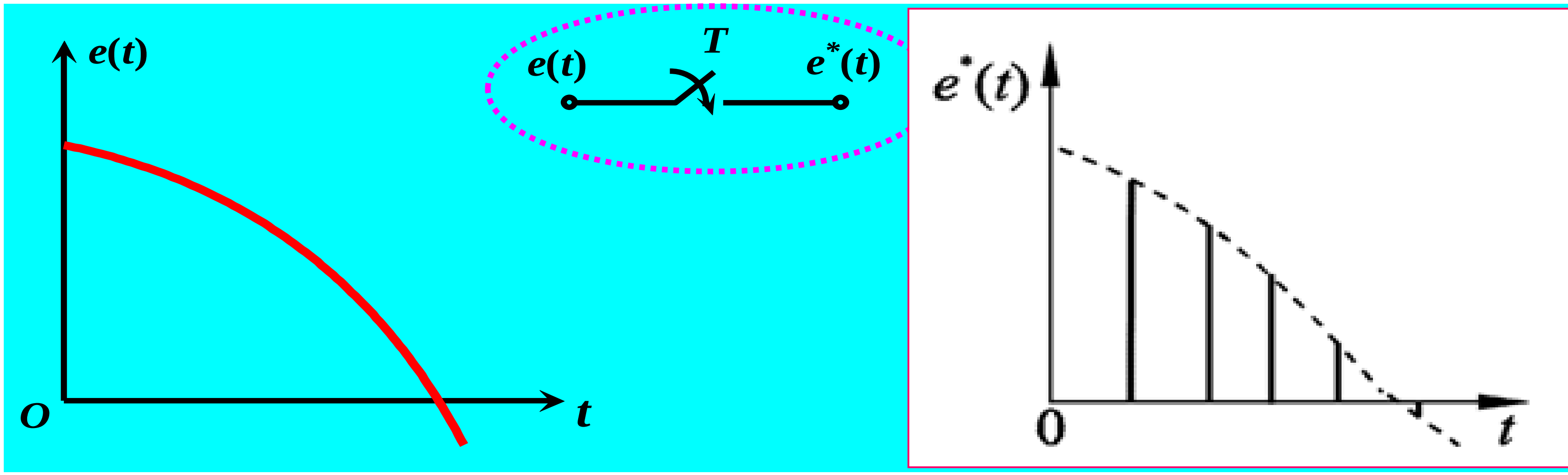
研究对象：线性闭环采样控制系统，采样周期固定。

数学工具：Z变换理论

数学模型：脉冲传递函数

7-2 信号的采样与保持

1. 采样过程



理想化：采样瞬间完成　$\tau \to 0$

则e*(t)就由离散的一系列采样瞬时的e(t)值组成，可看成强度不同的脉冲序列。 e*(t)与脉冲序列间的联系是：脉冲强度用其高度表示对应采样值，脉冲出现的时刻表示采样时刻。故采样信号可表示为：

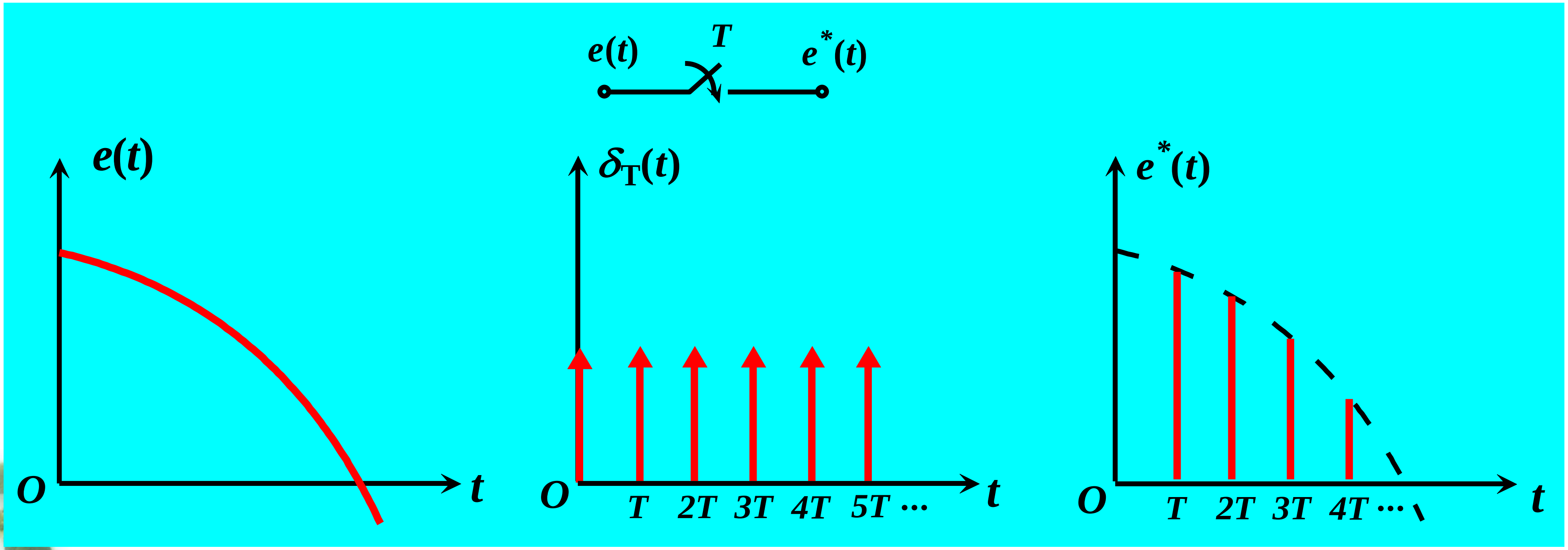
$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) = e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = e(t)\delta_T(t)$$

采样过程的物理意义：

采样过程可以看作是单位理想脉冲序列$\delta_T(t)$ 被输入信号$e(t)$ 进行幅值调制的过程，其中$\delta_T(t)$为载波信号，$e(t)$为调制信号，采样开关为幅值调制器,其输出为理想脉冲序列$e^*(t)$。

$$e^*(t) = e(t)\cdot\delta_T(t)$$



2.采样过程的数学描述：

（1）采样信号的拉氏变换

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=L[\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)L[\delta(t-nT)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}$$

$$=e(0)e^{-0Ts}+e(T)e^{-Ts}+e(2T)e^{-2Ts}+e(3T)e^{-3Ts}+\cdots$$

注意： **由于 $e^*(t)$只描述了$e(t)$在采样瞬时的数值，所以$E^*(s)$不能给出连续函数$e(t)$在采样间隔之间的信息。**

例7-3： 设 $e(t)=1(t)$ 求 $e^*(t)$ 的拉氏变换。

解：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-1}\qquad\left(\left|e^{-Ts}\right|<1\right)$$

$E^*(s)$是e^{Ts}的有理分式。

例7-4 设 $e(t)=e^{-at}$，a为常数，求 $e^*(t)$ 的拉氏变换

解：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-anT}e^{-nTs}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n(s+a)T}=\frac{1}{1-e^{-(s+a)T}}$$

$$=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-e^{-aT}} \qquad \left(\left|e^{-(s+a)T}\right|<1\right)$$

E*(s)是e^{Ts}的有理分式。

• (2) 采样信号的频谱分析

– 一个周期函数可以用傅氏级数进行分解，即

$$f_{\mathrm{T}}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\omega_s t+b_n\sin n\omega_s t]$$

其中，$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_{\mathrm{T}}(t)dt,\quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_{\mathrm{T}}(t)\cos n\omega_s tdt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_{\mathrm{T}}(t)\sin n\omega_s tdt,\quad n=1,2,3,\cdots$$

傅氏级数的指数形式为：

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_s t},C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega_s t}dt,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 单位理想脉冲序列的傅氏级数可写成：

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_s t}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_s t},\omega_s=2\pi/T$$

- 采样信号的频率特性：

$$e^*(t)=e(t)\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e(t)e^{jn\omega_s t}$$

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}L[e(t)e^{jn\omega_s t}]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(s-jn\omega_s)$$

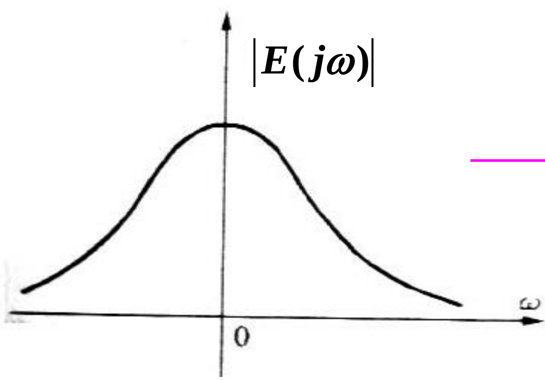
$$\Big\Downarrow\ \text{令}s=j\omega$$

$$E^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(j\omega-jn\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(j\omega+jn\omega_s)$$

$$=\cdots+\frac{1}{T}E(j\omega-j\omega_s)+\frac{1}{T}E(j\omega)+\frac{1}{T}E(j\omega+j\omega_s)+\cdots$$

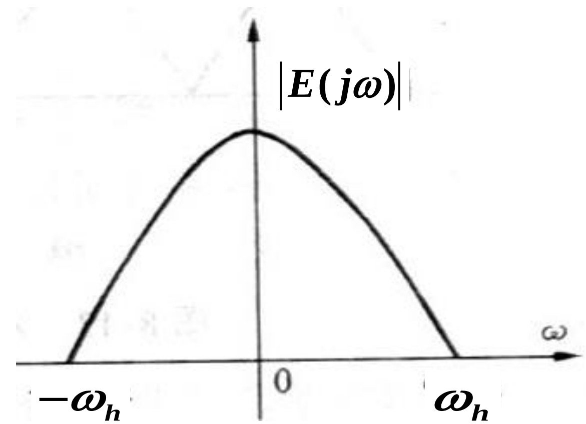
$$E^{*}(j\omega)=\cdots+\frac{1}{T}E(j\omega-j\omega_{s})+\frac{1}{T}E(j\omega)+\frac{1}{T}E(j\omega+j\omega_{s})+\cdots$$

■上式描述了E*(jw)与E(jw)之间的关系。



连续信号的频谱

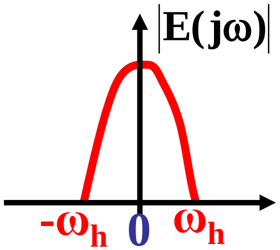
理想化

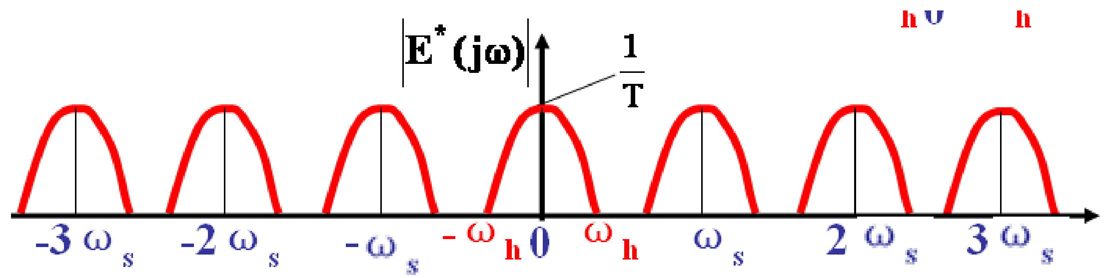


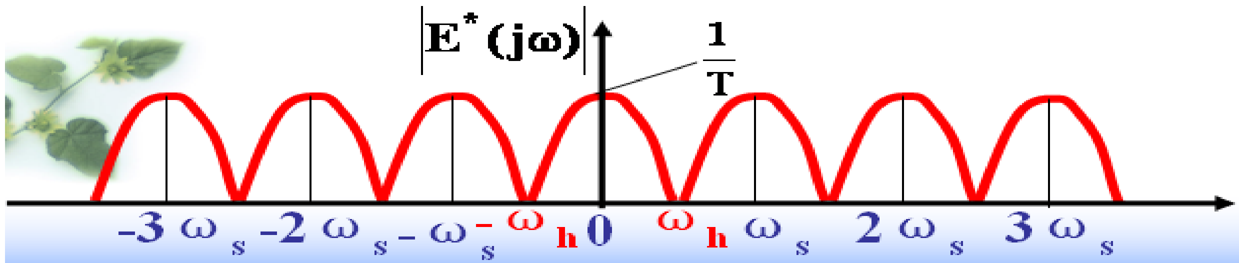
ω_h连续信号的上限频率

$$E^*(j\omega)=\cdots+\frac{1}{T}E(j\omega-j\omega_s)+\frac{1}{T}E(j\omega)+\frac{1}{T}E(j\omega+j\omega_s)+\cdots$$

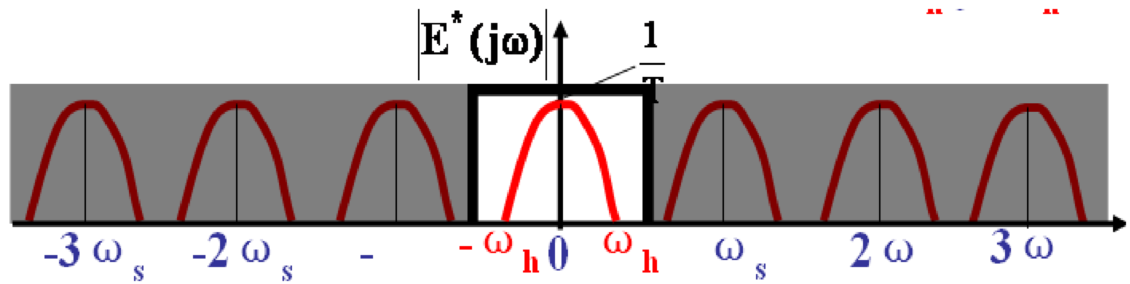
连续信号的频谱为　　　采样信号的频谱为

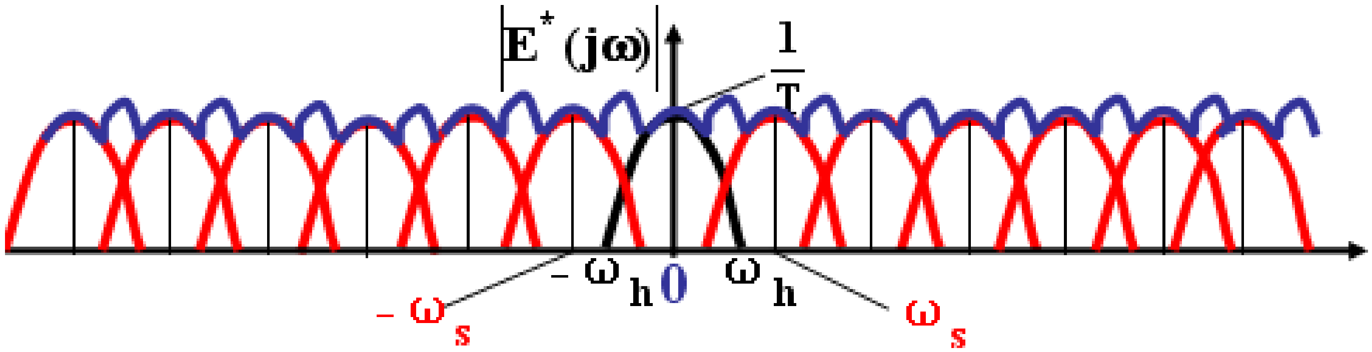






当$\omega_s \geq 2\omega_h$时，可用滤波器由采样信号复现连续信号。





当$\omega_s < 2\omega_h$时，无法用滤波器复现连续信号。

3.香农采样定理

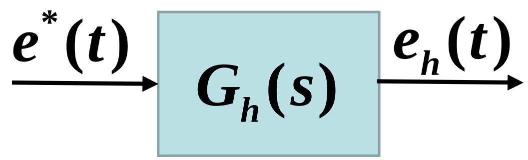
- 要解决的问题是：采样周期选多大，才能将采样信号较少失真地恢复为原来的连续信号。

- 香农定理：如果采样器的 输入信号$e(t)$ 具有有限带宽，具有最高频率为ω_h 的频率分量，要从采样信号$e^*(t)$中完全复现出采样前的连续信号$e(t)$，必须满足以下条件：

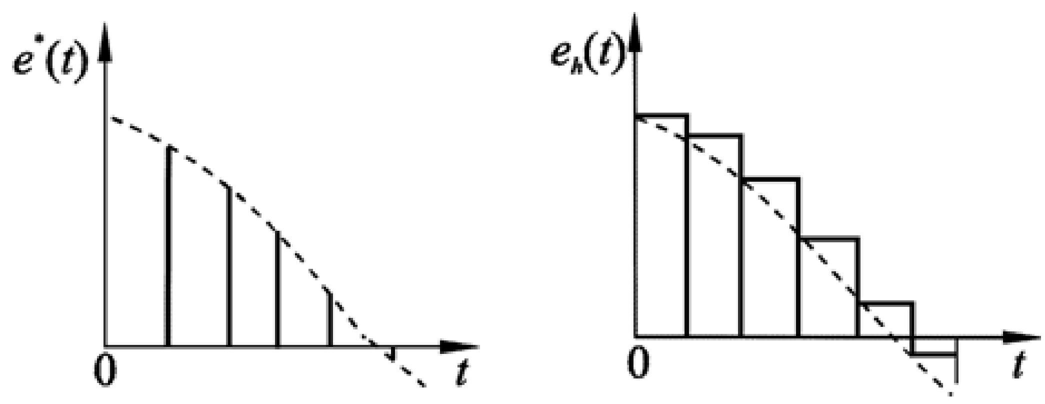
$$\omega_s \geq 2\omega_h \text{即} T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

5.信号保持

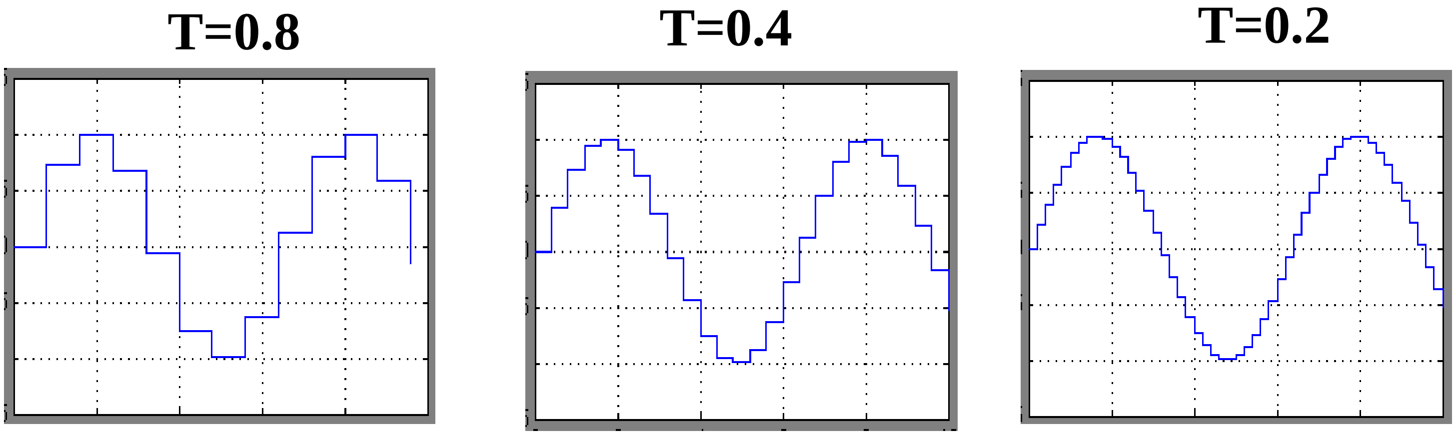
信号保持：



零阶保持器把前一采样时刻的采样值保持到下一个采样时刻。即e(nT+Δt)=e(nT), 0< Δt<T.

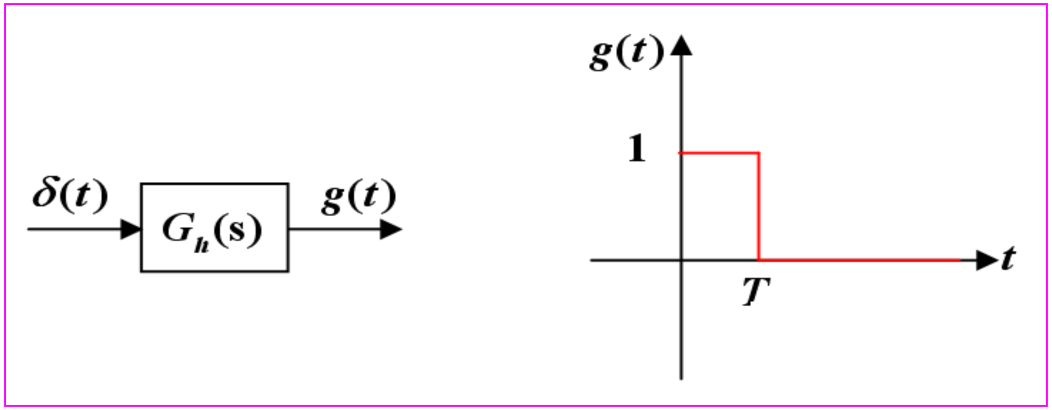


正弦信号在采样周期不同时经零阶保持器后的曲线如下：



只要采样周期足够小（采样频率足够高）， $e_h(t)\approx e(t)$

一 零阶保持器的传递函数和频率特性



$$g(t)=1(t)-1(t-T)$$

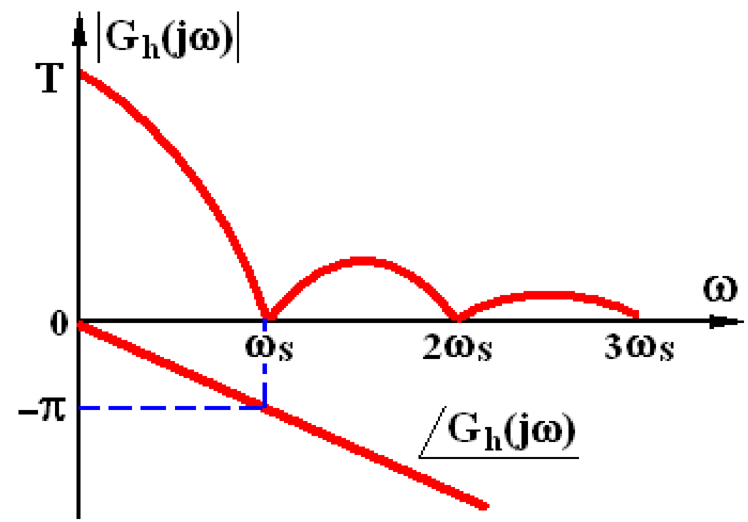
$$G_h(s)=L[g(t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts}$$

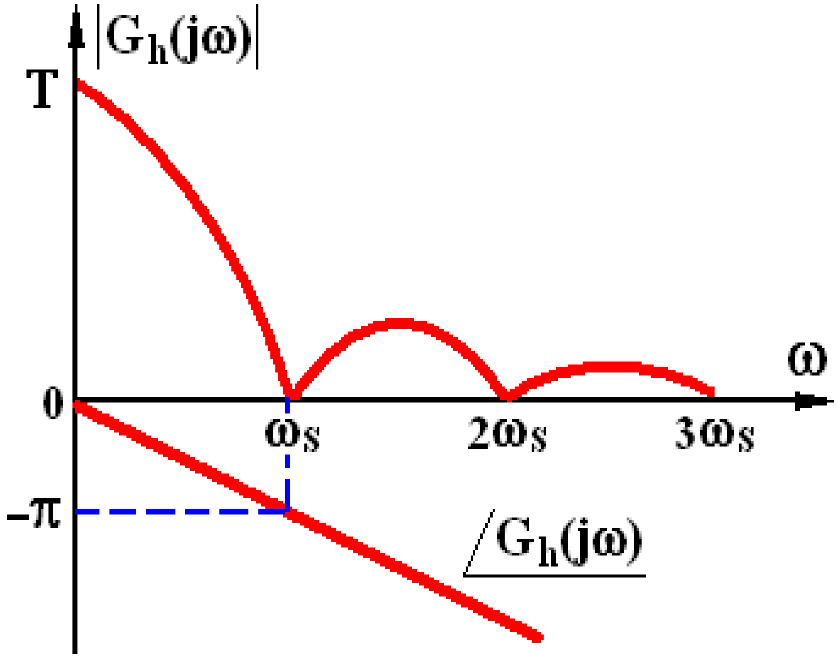
$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{e^{-j\frac{\omega T}{2}}(e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}})}{j\omega}$$

$$=T\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_s}\frac{\sin\pi\omega/\omega_s}{\pi\omega/\omega_s}e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$





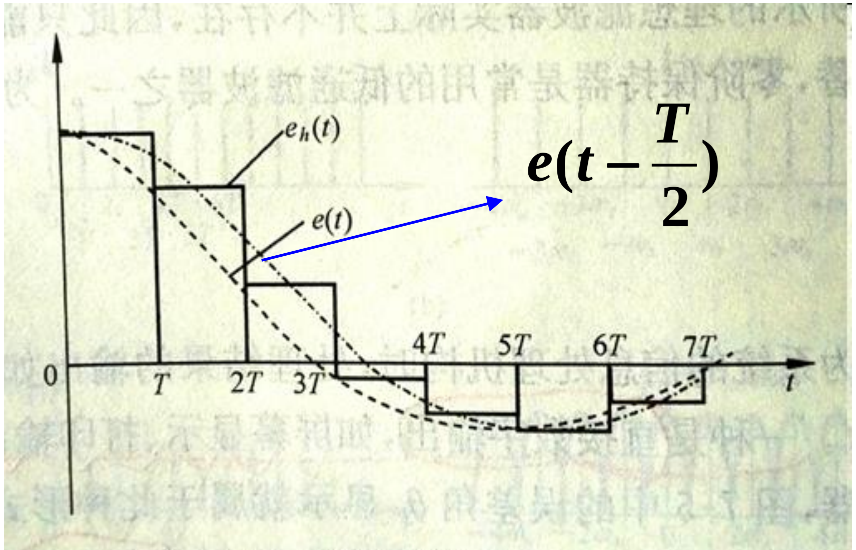


图 7-17 零阶保持器的输出特性

零阶保持器的特性：

（1）低通特性

（2）相角滞后特性

（3）时间滞后特性

平均滞后时间为T/2.

$$G_h(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

7-3 Z 变换理论

1、Z变换定义

采样信号拉氏变换为： $E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}$ P255 式7-5

令$z=e^{Ts}$，则 $E(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)z^{-n}$ P262 式7-21

称$E(z)$为采样信号$e^*(t)$的Z变换，记做

$$E(z)=Z[e^*(t)]=Z[e(t)]$$

E(z)与E*(s)之间的关系： $E(z)=E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$ P263 式7-23

2、Z变换方法

1、级数求和法（根据定义来求）

级数求和法直接根据z变换定义求取。

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

例7-5： **试求单位阶跃函数1(*t*)的*z*变换**

解：

$$e(nT)=1$$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-n}+\cdots$$

$$\text{若}\left|z^{-1}\right|<1,\text{则}E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

例7-6 试求理想脉冲序列 $\delta_T(t)$ 的z变换。

解： $\because e(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=1\cdot\delta(t)+1\cdot\delta(t-T)+1\cdot\delta(t-2T)+\cdots$

$\therefore e^*(t)=e(t) \qquad \therefore e(nT)=1$

$$e(nT)=1$$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-n}+\cdots$$

若$\left|z^{-1}\right|<1$,则$E(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$

由此可知，只要采样后的信号相同，便具有相同的Z变换，其对应的连续信号可截然不同。

补例 求e^{-at}的Z变换。

$$Z[e^{-at}]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-anT}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{aT}z)^{-n}$$

$$=1+(e^{aT}z)^{-1}+(e^{aT}z)^{-2}+\cdots \quad 若\left|(e^{aT}z)^{-1}\right|<1$$

$$=\frac{1}{1-(e^{aT}z)^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$Z[e^{at}]=?$$

$$Z[e^{at}]=\frac{1}{1-(e^{-aT}z)^{-1}}=\frac{z}{z-e^{aT}}$$

2、部分分式法（由E(s)直接求E(z)）

– 先将E(s)写成部分分式之和，再对每一部分分式求Z变换。

$$E(s)=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{s+p_i} \Leftrightarrow E(z)=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i z}{z-e^{-p_iT}}$$

=常数

E(s)的极点

补例 求$X(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$ 的Z变换。

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-e^{-0T}}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

例7-7 求 $e(t)=\sin\omega t$ 的Z变换。

$$E(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right)$$

课本P264 表7-2 z变换表

由表可知，传递函数分母中S的最高阶次与对应Z变换分母中Z的最高阶次相同。

3、z变换性质

1、线性定理

$$Z[ae_1^*(t)\pm be_2^*(t)]=aE_1(z)\pm bE_2(z)$$

2、实数位移定理

滞后定理 $Z[e(t-kT)]=z^{-k}E(z)$

超前定理 $Z[e(t+kT)]=z^{k}[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}]$

例7-8

求$Z[e^{-a(t-T)}]$

3、复数位移定理

$$Z[e(t)\cdot e^{\mp at}]=E(z\cdot e^{\pm aT})$$

例7-9

求$Z[t\,e^{-at}]$

4、终值定理

$$\lim_{n\to\infty}[e(nT)] = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$$

借助超前定理推导

P268 式 7-31/32

5、初值定理

$$\lim_{t\to 0}[e(t)] = \lim_{z\to\infty} E(z)$$

借助定义推导

四、 Z反变换

1、Z 反变换的定义

由已知的 Z 变换$E(z)$，求相应的离散序列$e(nT)$并记为：

$$\boxed{e(nT)=Z^{-1}\left[E(z)\right]}$$

2、 Z 反变换的求法

常用的方法有：部分分式法，长除法和留数法。

(1)部分分式法

将 $\frac{E(z)}{z}$ 分解为部分分式和，再写出E(z)的部分分式和(确保分子中含有Z因子)，再通过查表求出对应的离散序列。

$$E(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-z_i}\xrightarrow{\text{查表}}e^*(t)\text{或}e(nT)$$

z_i为E(z)的极点，上式为E(z)无重根时的情况。

例7-11 $E(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ 求其Z反变换。

解：

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}}$$

$$\therefore E(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$Z^{-1}[\frac{z}{z-1}]\to 1,\qquad Z^{-1}[\frac{z}{z-e^{-aT}}]\to e^{-anT},$$

$$\therefore e(nT)=1-e^{-anT}$$

$$\mathrm{e}^{*}(\mathrm{t})=\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-anT})\delta(t-nT)$$

课本P264 表7-2 z变换表

$$e(t)=1(t)\longleftrightarrow E(z)=\frac{z}{z-1},e(t)=e^{-at}\longleftrightarrow E(z)=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

补例 $X(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow x(nT)?$

解：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

$$\therefore X(z)=\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}\xrightarrow{\text{查表}} Z^{-1}[\frac{z}{z-1}]=1, Z^{-1}[\frac{z}{z-2}]=2^n,$$

$$\therefore x(nT_s)=-10+10\cdot 2^n=10(-1+2^n), \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$a^{t/T} \xleftrightarrow{\text{查表}} \frac{z}{z-a}$$

课本P264 表7-2 z变换表

(2)幂级数法/综合除法/长除法

–利用多项式除法，将E(z)写成z^{-1}升幂排列的幂级数展开式，则z^{-n}前的系数就是第n个采样时刻的e(t)值，即e(nT).

$$E(z)=c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+c_3z^{-3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}$$

$$e(nT)=c_n$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\delta(t-nT)$$

补例 求$X(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$对应的x(nT)或x*(t)。

解：

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}=\frac{10z}{z^2-3z+2}$$

$$=0z^0+10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+310z^{-5}+\cdots$$

$$x^*(t)=x(nT)=0\delta(t)+10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)+\cdots$$

例7-12 $E(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z^3-1.5z^2+0.5z}$对应的e(nT)或e*(t)。

(3)留数法/反演积分法

$z_1, z_2, \cdots, z_k$是$E(z)z^{n-1}$的极点，则

$$e(nT) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}$$

P272 式7-44

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)$$

单极点：$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i} = \lim\limits_{z\to z_i}[(z-z_i)E(z)z^{n-1}]$ 式7-45

n重极点：$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i} = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_i}\dfrac{d^{n-1}[(z-z_i)^n E(z)z^{n-1}]}{dz^{n-1}}$

例7-13 用留数法求z的反变换。

$$E(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

解：$E(z)z^{n-1}$有两个极点：1，0.5。其留数分别为

$$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to1}=(z-1)\frac{z^2\cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-0.5)}\bigg|_{z\to1}=2$$

$$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to0.5}=(z-0.5)\frac{z^2\cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-0.5)}\bigg|_{z\to0.5}=-0.5^n$$

故

$$e(nT)=2-0.5^n$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(2-0.5^n)\delta(t-nT)$$

P303 作业

7-2（1）定义法
（4）部分分式法
7-3（1）选用部分分式法、幂级数法、反演积分法中的任一种即可
7-5

7-4 离散系统的数学模型

1. 离散系统的数学定义

$$c(n)=F[r(n)]$$

（1）线性离散系统：满足叠加原理。

（2）线性定常离散系统：输入与输出关系不随时间而改变的线性离散系统。

2.线性常系数差分方程及其解法

(1)差分方程

对于一般的线性定常离散系统，k时刻的输出c(k)，不但与此时的输入r(k)有关，还与k时刻以前的输入和输出有关。这种关系可表示如下：

$$
\begin{aligned}
&c(k)+a_1c(k-1)+a_2c(k-2)+\cdots+a_nc(k-n)\\
&=b_0r(k)+b_1r(k-1)+b_2r(k-2)+\cdots+b_mr(k-m)
\end{aligned}
$$

式中，a_i，b_j均为常数且$m \le n$。

上式为**n阶**线性常系数差分方程，它代表一个线性定常离散系统。

- **差分方程的求解：1) 迭代法　　2）z变换法**
- **迭代法是根据已知的差分方程和输入输出序列的初始值，利用递推关系逐步求出所需的输出值的方法。**
- **例７－１４：已知差分方程为**

$$c(k)-5c(k-1)+6c(k-2)=r(k)$$

输入序列*r*(*k*)=1，初始条件为 $c(0)=0,c(1)=1$

试用迭代法求输出序列 $c(k):k=0,1,2,\cdots,6$。

解：根据初始条件及递推关系得：

$$c(0)=0,\quad c(1)=1,\quad c(2)=r(2)+5c(1)-6c(0)=6$$

$$c(3)=r(3)+5c(2)-6c(1)=25 \qquad \cdots\cdots$$

$$c(4)=r(4)+5c(3)-6c(2)=90$$

适用于计算机求解

2) Z变换法

用Z变换法解差分方程的实质，是对差分方程两端取Z变换，并利用Z变换的时位移性质，得到以z为变量的代数方程，然后对代数方程的解取Z反变换即求得输出序列。

例7-15 求 $c^*(t+2T)+3c^*(t+T)+2c^*(t)=0$

差分方程 或 $c(n+2)+3c(n+1)+2c(n)=0,\qquad c(0)=0, c(1)=1.$

解：对差分方程两边取Z变换得

$$z^2[C(z)-c(0)-c(1)z^{-1}]+3z[C(z)-c(0)]+2C(z)=0$$

代入初始条件并整理得

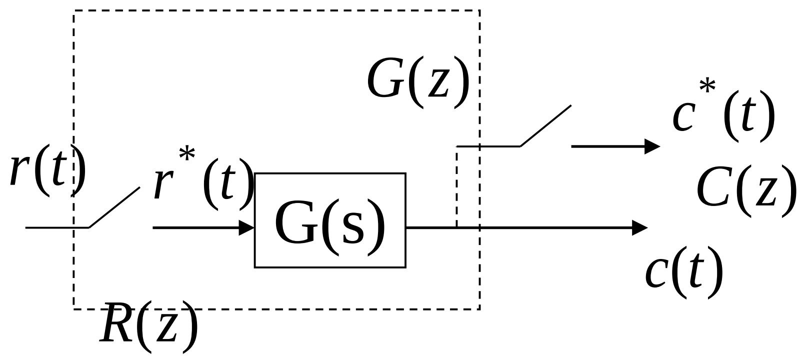
$$C(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

查表得

$$c(n)=Z^{-1}[C(z)]=(-1)^n-(-2)^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

3. 脉冲传递函数

（1）定义：零初始条件下，离散系统输出采样信号的Z变换与输入采样信号的Z变换之比。



$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}$$

零初始条件的含义：在**t<0**时，输入序列和输出序列全为**0.**

$$c^*(t)=Z^{-1}[C(z)]=Z^{-1}[G(z)R(z)]$$

由此知，利用脉冲传递函数只能求出**c*(t)**，即只能求出**c(t)**采样后的信号值。

注意：

（1）脉冲传递函数G(z)是对输出、输入序列而言的，当输出并非脉冲序列时，可将其看成脉冲序列（即输出端画上一个假想的同步采样开关）

（2）G(s)是连续环节的传递函数，而G(z)表示连续环节+采样开关的传递函数（脉冲传递函数）。

（2）脉冲传递函数的意义：离散环节/系统的单位脉冲响应的Z变换就是该环节/系统的脉冲传递函数。

（3）脉冲传递函数的求法

1）由差分方程求取

例7-16 设某环节的差分方程为 $c(nT)=r[(n-k)T]$

求其脉冲传递函数。

解：两边取Z变换，由实位移定理得

$$C(z)=z^{-k}R(z)$$

得脉冲传递函数为 $$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=z^{-k}$$

2）由传递函数求脉冲传递函数

等同于用部分分式法求Z变换。

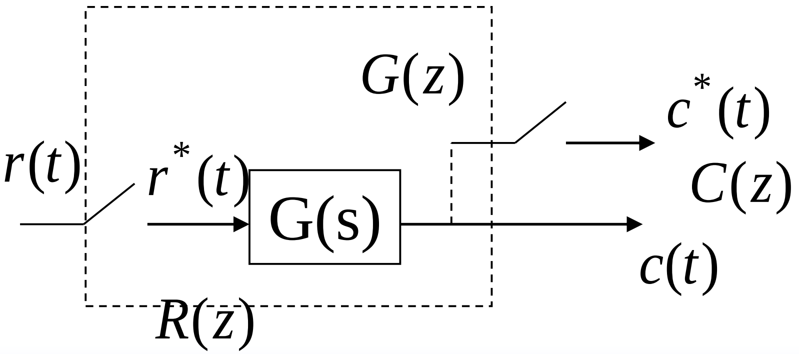
$$G(s)=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{s+p_i}\Leftrightarrow G(z)=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i z}{z-e^{-p_i T}}$$

$e^{-p_i T}$ =常数

p_i：G(s)的极点

例 7-17 求系统的脉冲传递函数。

$$\text{其中}G(s)=\frac{a}{s(s+a)}$$



解：系统脉冲传递函数G(z)为：

$$G(z)=Z[G(s)]=Z[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

G（s）的极点与G（z）的极点一一对应。

4、开环系统脉冲传递函数

（1）采样函数拉氏变换的重要性质：

- 采样信号的拉氏变换具有周期性 $G^*(s)=G^*(s+jk\omega_s)$
- 离散信号$E^*(s)$可以从离散符号中提出来。即

$$[G(s)E^*(s)]^*=G^*(s)E^*(s)$$

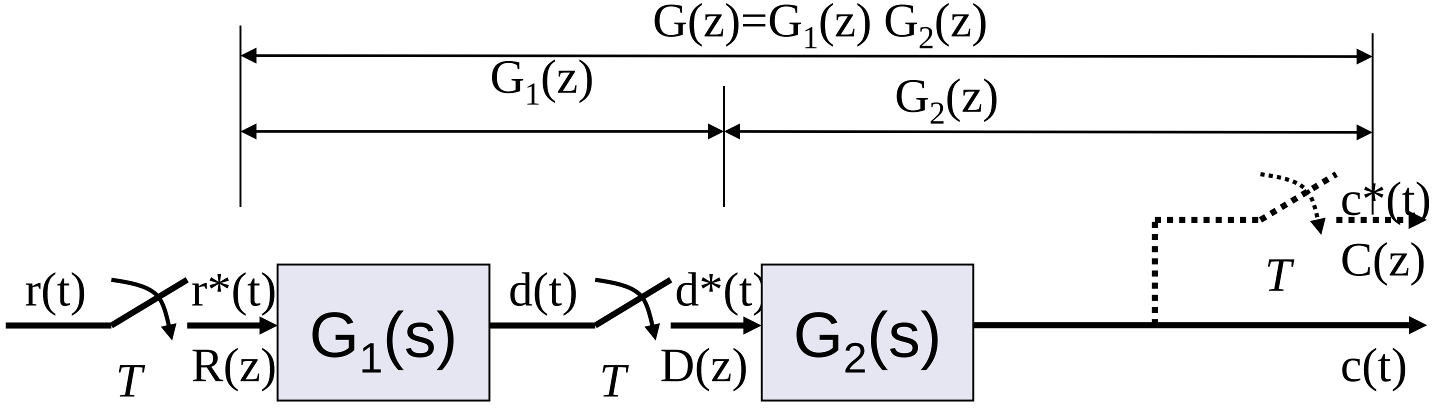
注意： $[G(s)E(s)]^*\neq G^*(s)E^*(s)$

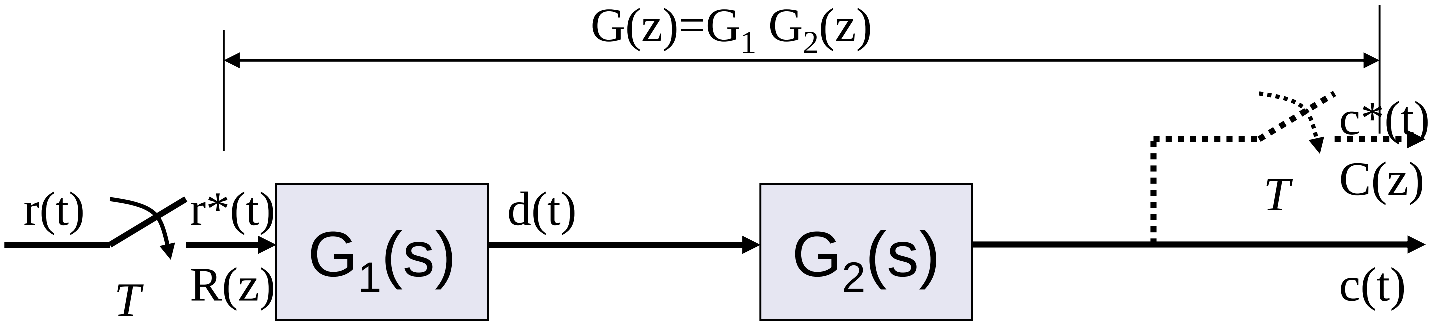
- $$[X_1(s)\pm X_2(s)]^*=X_1^*(s)\pm X_2^*(s)$$

通过采样信号与离散信号的拉氏变换间的关系证明

(2) 具有串联环节的开环系统脉冲传递函数

关于串联有两种典型的情况





结论

- 被理想采样开关隔开的两个连续线性环节串联时，其脉冲传递函数等于各环节脉冲传递函数的乘积。这个结论可以推广到n个环节串联。

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)\cdots G_n(z)$$

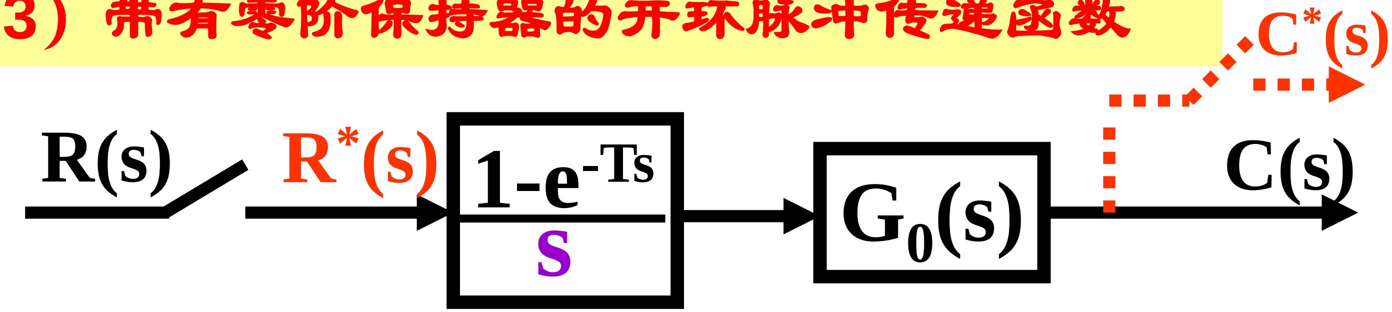
- 没有采样开关隔离时两个连续线性环节串联,其脉冲传函为各环节传函相乘之后的Z变换。这个结论可以推广到n个环节串联。

$$G(z) = G_1G_2\cdots G_n(z)$$

- 例题7-18，求上图中的开环系统脉冲传递函数。

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \qquad G_2(s) = \frac{a}{s+a}$$

（3）带有零阶保持器的开环脉冲传递函数



$$C(z)=R(z)G_hG_0(z)$$

$$G(z)=C(z)/R(z)=Z[\frac{1}{s}G_0(s)-\frac{1}{s}G_0(s)e^{-Ts}]$$

$$=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s}G_0(s)]$$

例7-19：上图中，设对象传递函数 $G_0(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$

求带零阶保持器后系统的脉冲传递函数。

$$\because \quad G(z)=C(z)/R(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s}G_0(s)]$$

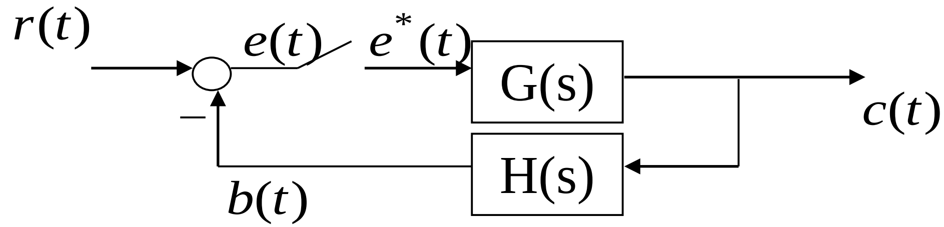
$$Z[\frac{1}{s}G_0(s)]=Z[\frac{1}{s}\frac{a}{s(s+a)}]=Z[\frac{1}{s^2}-\frac{1/a}{s}+\frac{1/a}{s+a}]$$

$$=\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1/a)z}{z-1}+\frac{(1/a)z}{z-e^{-aT}}$$

$$G(z)=\frac{1/a[(e^{-aT}+aT-1)z+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})]}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

与例7-17比较可知，零阶保持器不影响离散系统开环脉冲传递函数的极点。

5、闭环系统脉冲传递函数



$$C(z)=G(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-B(z)=R(z)-E(z)HG(z)$$

$$E(z)=\frac{R(z)}{1+GH(z)}\Rightarrow\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+GH(z)}$$

$$C(z)=\frac{R(z)G(z)}{1+GH(z)}\Rightarrow\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

$G_K(z)=GH(z)$ 开环脉冲传递函数

$1+G_K(z)=1+GH(z)=0$ 离散系统特征方程

例7-20 设闭环离散系统结构图如图7-24所示，试证其闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$$

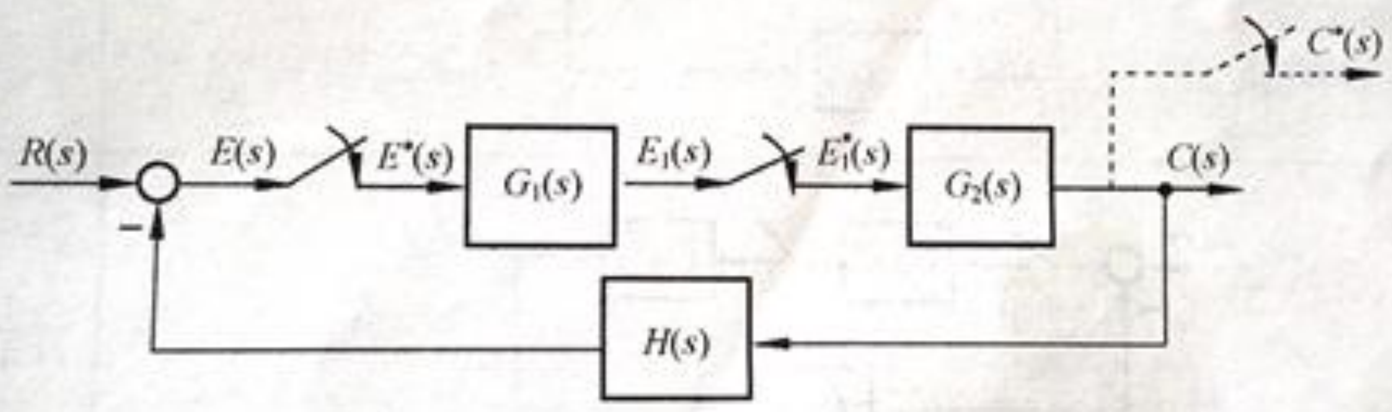


图 7-24 闭环离散系统

说明 P285中间以“需要指出，……开始的两段”

- （1）闭环离散系统的脉冲传递函数$\Phi(z)$、$\Phi_e(z)$不能直接由传递函数$\Phi(s)$、$\Phi_e(s)$求得。即

$$\Phi(z) \neq Z[\Phi(s)], \Phi_e(z) \neq Z[\Phi_e(s)]$$

- （2）未对误差信号采样的闭环离散系统，不存在$\Phi(z)$、$\Phi_e(z)$，而只能求出$C(z)$的表达式。(可由表7-3得到验证)

6.Z变换的局限性

- 1）z变换的推导建立在采样过程的理想化处理上。即只有当采样持续时间远小于系统最大时间常数时才成立。
- 2）C(z)只给出了c(t)在采样时的值，不能反映采样间隔中的信息。
- 3）用z变换分析离散系统时，系统连续部分G(s)的极点数至少要比其零点数多两个，否则c*(t)与c(t)差别较大。

7-5离散系统的稳定性与稳态误差

稳定性定义：若离散系统在有界输入序列作用下，其输出序列也是有界的，则称该离散系统是稳定的。

（1）时域中离散系统稳定的充要条件

若系统在理想单位脉冲序列作用下，则有

$$C(z)=\Phi(z)=\frac{M(z)}{D(z)}$$

当脉冲传递函数$\Phi(z)$无重极点时，$C(z)$可分解为

$$C(z)=\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k z}{z-p_k}$$

求反变换，得

$$c(nT)=\sum_{k=1}^{l}c_k p_k^n$$

求反变换，得

$$c(nT)=\sum_{k=1}^{l}c_k p_k^n$$

◆若 $|p_k|<1(k=1,2,3,\cdots l)$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c(nT)=0$

系统是稳定的。

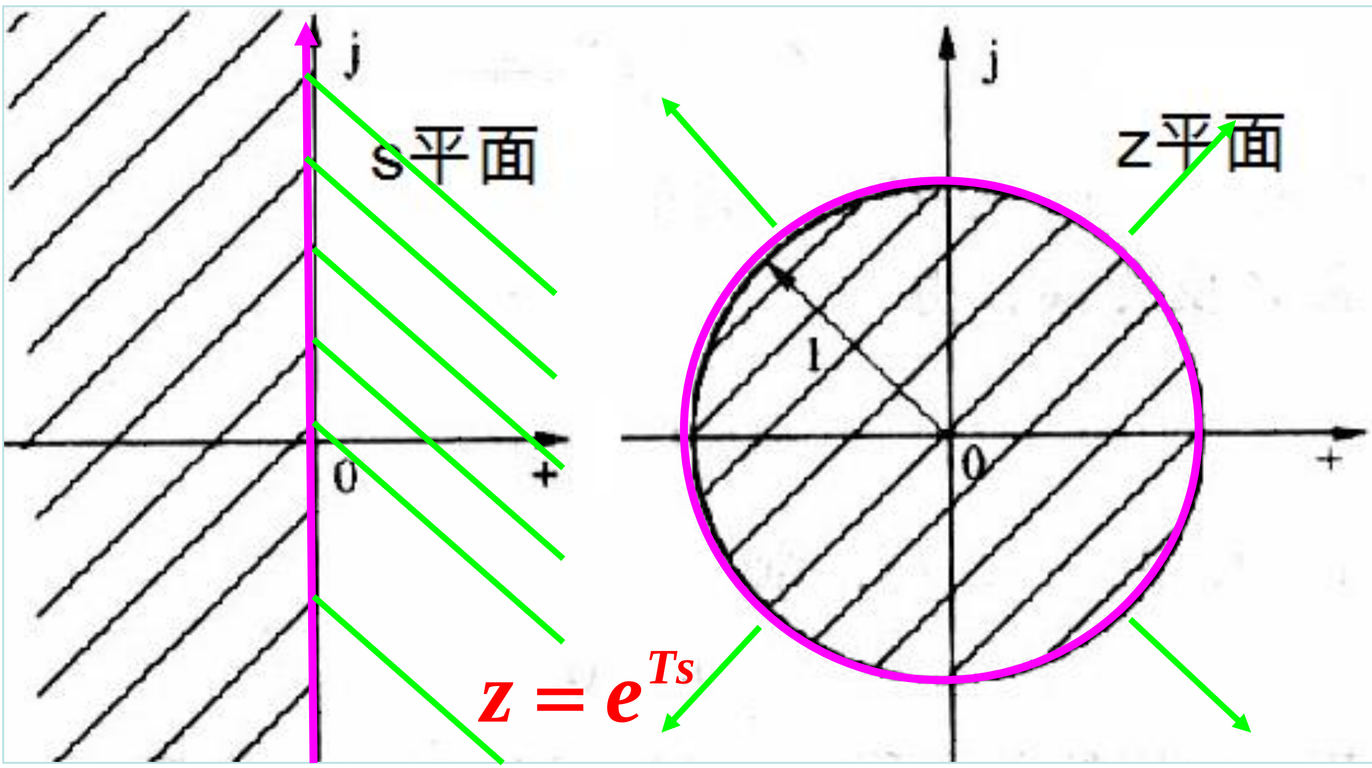
◆只要Φ(z)有一个极点的模大于 1，则

$\lim\limits_{n\to\infty}c(nT)=\infty$ ，系统便是不稳定的。

（2）z域中离散系统稳定的充要条件

根据 s 与 z 之间的映射关系进行推导。

$$\because \quad s = \sigma + j\omega \qquad z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma}e^{jT\omega} = |z|\angle z$$



稳定性	S平面	z平面
临界稳定	虚轴	单位圆周
稳定	S左半平面	单位圆内
不稳定	S右半平面	单位圆外

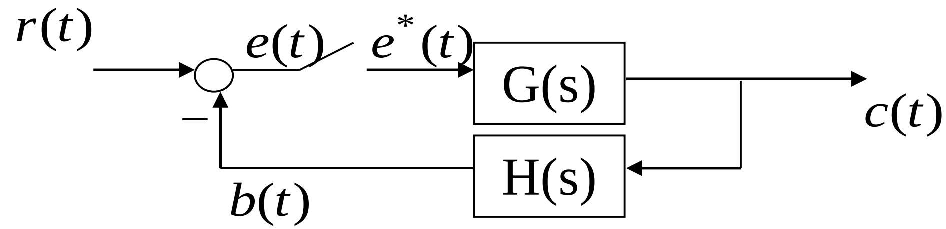
离散系统稳定的充分必要条件：

当且仅当离散特征方程的全部特征根均分布在z平面上的单位圆内，或者所有特征根的模均小于1，即

$$|z_i| < 1,\ i = 1,2,\cdots,n,$$

P291/292页蓝色字体均有描述。

例7-23 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}\qquad H(s)=1$



采样周期T=1，试分析闭环系统的稳定性。

解：开环脉冲传递函数

$$HG(z)=G(z)=Z[\frac{10}{s(s+1)}]=10\cdot Z[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]=\frac{10(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

闭环特征方程

$$1+GH(z)=1+\frac{10(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}=0\qquad z^2+4.952z+0.368=0$$

$$z_1=-0.076,\quad z_2=-4.876$$

结论：因为$|z_2|>1$，所以闭环系统不稳定。

- P292 下部
- 应当指出，当例7-23中无采样器时，二阶连续系统总是稳定的，但是引入采样器后，二阶离散系统却有可能变得不稳定，这说明采样器的引入一般会降低系统的稳定性。如果提高采样频率（减小采样周期），或降低开环增益，离散系统的稳定性将得到改善。

三、离散系统的稳定性判据

- 劳斯判据可用来判断一个多项式方程位于复平面的右半平面上根的个数。为了将其应用到离散系统稳定性的判定上来，我们引入了W变换：

$$z=\frac{w+1}{w-1}\Leftrightarrow w=\frac{z+1}{z-1}$$

若

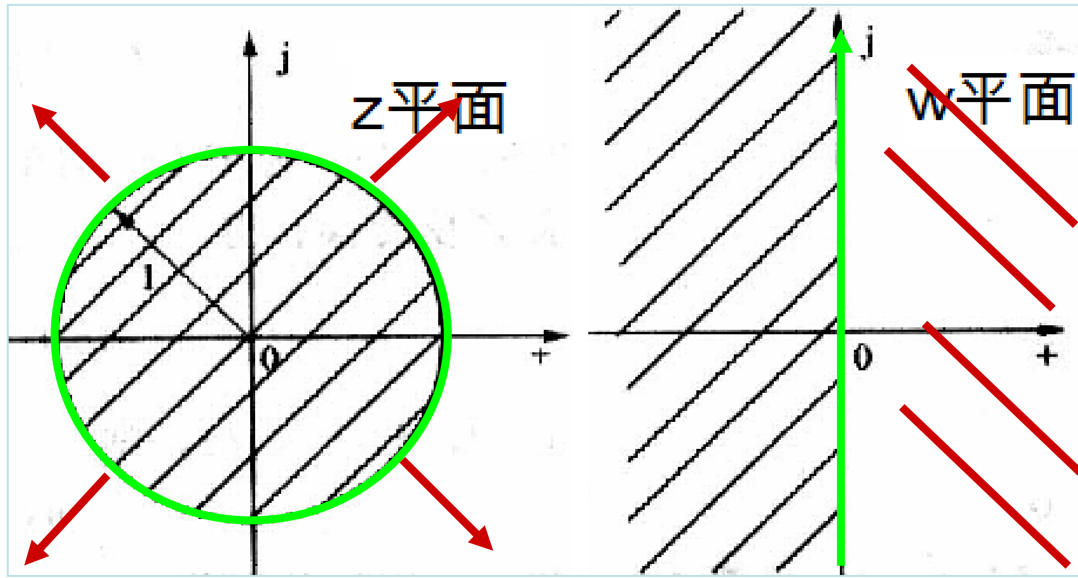
$$\mathrm{Re}\,w>0 \Rightarrow |w+1|>|w-1| \Rightarrow |z|=\left|\frac{w+1}{w-1}\right|>1$$

$$\mathrm{Re}\,w<0 \Rightarrow |w+1|<|w-1| \Rightarrow |z|=\left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1$$

$$\mathrm{Re}\,w=0 \Rightarrow |w+1|=|w-1| \Rightarrow |z|=\left|\frac{w+1}{w-1}\right|=1$$

由上面的式子，可得到如下的Z与W的映射关系。

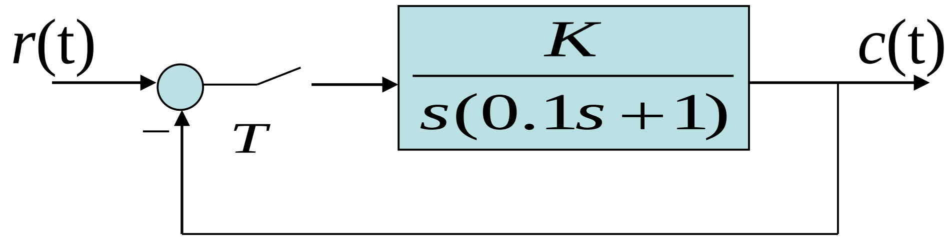
$$z = \frac{w+1}{w-1}$$



Z平面：	单位圆上	单位圆内	单位圆外
	↓	↓	↓
W平面：	虚轴	W左半平面	W右半平面

- 把劳斯判据用于判断离散控制系统稳定性的步骤：
  - 求出离散控制系统的特征方程$D(z)=0$；
  - 将$D(z)$中的z用$(w+1)/(w-1)$替代，得$p(w)=0$。
  - 应用劳斯判据。离散系统稳定的充要条件是$p(w)=0$的根都在w的左半平面。

例7-24：设闭环离散系统如图所示，*T*=0.1(s)，试求系统稳定时*K*的临界值。



解：

$$G(z)=Z[\frac{K}{s(0.1s+1)}]=\frac{0.632Kz}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.632Kz}{z^2+(0.632K-1.368)z+0.368}$$

$$1+G(z)=z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+(0.632K-1.368)\left(\frac{w+1}{w-1}\right)+0.368=0$$

$$0.632K w^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632K) = 0$$

劳思表

$$\begin{array}{lll} w^2 & 0.632K & 2.736-0.632K \\ w & 1.264 & 0 \\ w^0 & 2.736-0.632K & \end{array}$$

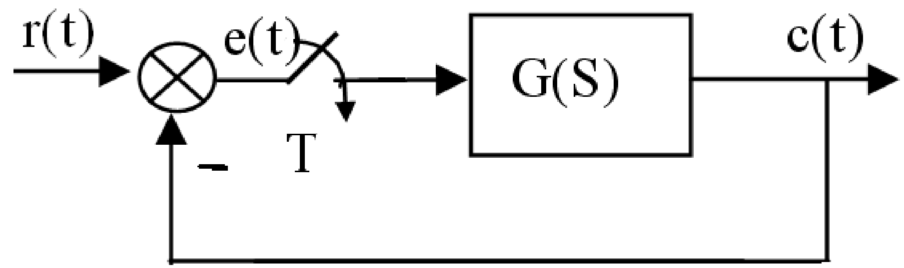
$$K > 0 \quad , 2.736 - 0.632K > 0 \rightarrow K < 4.33$$

使系统闭环稳定的K取值范围 $0 < K < 4.33$

临界增益 $K_c = 4.33$

4、离散系统的稳态误差

以右图所示离散系统为例，系统的误差脉冲传递函数为：



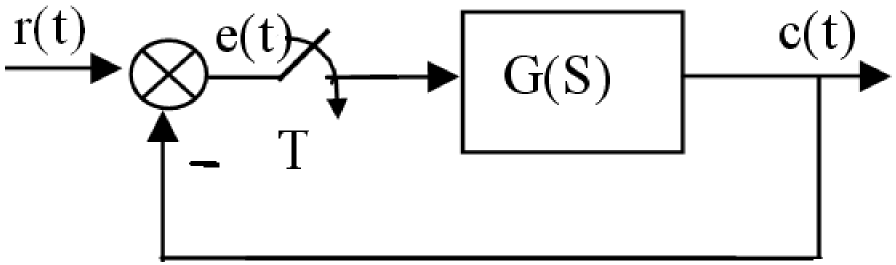
$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+GH(z)}=\frac{1}{1+G(z)},E(z)=\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

若系统稳定，根据Z变换的终值定理，系统的稳态误差为：

$$e(\infty)=\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

- 例7-25 设离散系统如图7-33所示，其中 $G(s)=1/s(0.1s+1)$，$T=0.1s$，输入连续信号 $r(t)$ 分别为 $1(t)$ 和 t，试求离散系统相应的稳态误差。



$$G(z)=\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$\Phi_e(z)=\frac{1}{1+G(z)}=\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}$$

$$z_1=0.368+j0.482, z_2=0.368-j0.482 \Rightarrow |z_1|=|z_2|<1$$

系统稳定。

$$r(t)=1(t)\Rightarrow R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}\cdot\frac{z}{z-1}=0$$

$$r(t)=t\Rightarrow R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=T$$

$$=0.1$$

为了简化典型输入信号作用下稳态误差的计算过程，引入了系统型别和静态误差系数的概念。

5、离散系统的型别与静态误差系数

- 在离散系统中，把开环脉冲传递函数G(z)具有z=1（对应于s=0）的极点个数V作为划分离散系统型别的标准。分别为0型, I型,II型离散系统等。

(1) 单位阶跃输入下的稳态误差

$$r(t)=1(t), R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\frac{z}{(z-1)}}{1+G(z)}=\lim_{z\to1}\frac{1}{1+G(z)}$$

令$K_p=\lim_{z\to1}[1+G(z)]$ 称为系统的静态位置误差系数。

单位阶跃输入下的稳态误差为：$e_{ss}(\infty)=\dfrac{1}{K_p}$

（2）单位斜坡输入的稳态误差

$$r(t)=t\cdot 1(t), R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2[1+G(z)]}=\lim_{z\to 1}\frac{T}{(z-1)G(z)}$$

令$K_v=\lim_{z\to 1}[(z-1)G(z)]$ 称为系统的静态速度误差系数

$$e_{ss}(\infty)=\frac{T}{K_v}$$

(3) 单位加速度输入的稳态误差

$$r(t)=\left[\frac{1}{2}t^2\cdot 1(t)\right] \quad \Rightarrow R(z)=\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{T^2 z(z+1)}{2[1+G(z)](z-1)^3}=\lim_{z\to 1}\frac{T^2}{(z-1)^2 G(z)}$$

令$K_a=\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)^2 G(z)]$ 称为系统的静态加速度误差系数

$$e_{ss}(\infty)=\frac{T^2}{K_a}$$

- 从上面的分析可以看出，系统的稳态误差与三个因素有关：
  - (1)输入信号；
  - (2)采样周期，缩短采样周期将会降低稳态误差；
  - (3)系统的开环脉冲传递函数$G(z)$中$z=1$的极点（积分环节）的个数v和开环增益K。

求稳态误差的一般步骤

- 1.判稳
- 2.求E(z)或K_p、K_v、K_a
- 3.下式求e_{ss}

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)\text{或}$$

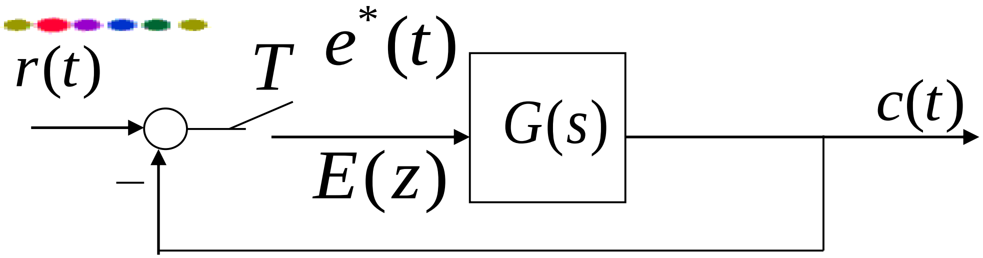
$$K_p=\lim_{z\to 1}[1+G_k(z)]\Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_p}$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}[(z-1)G_k(z)]\Rightarrow e_{ss}=\frac{T}{K_v}$$

$$K_p=\lim_{z\to 1}[(z-1)^2G_k(z)]\Rightarrow e_{ss}=\frac{T^2}{K_a}$$

例7-25图中

$$G(s)=\frac{1}{s(0.1s+1)},\quad T=0.1\,(s)$$



$$\boldsymbol{r(t)=1(t)\,,\,r(t)=t\cdot 1(t)}$$

试求离散系统相应的稳态误差。

解1：

$$G(z)=\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$\Phi_e(z)=\frac{1}{1+G(z)}=\frac{(z-1)(z-e^{-1})}{z^2-0.736z+0.368}$$

$$z_{1,2}=0.368\pm j0.482$$ **系统闭环稳定。**

$$\boldsymbol{(1)\quad r(t)=1(t),\quad K_p=\infty, e(\infty)=1/K_p=0}$$

$$\boldsymbol{(2)\quad r(t)=t\cdot 1(t)\quad ,\quad K_v=1, e(\infty)=T/K_v=0.1}$$

7-6 离散系统的动态性能分析

- 1. 离散系统的时间响应
- 研究离散系统的动态性能时，通常假定外作用是单位阶跃函数。可先求出C(z)，再进行z的反变换求出c*(t)，之后根据c*(t)分析系统动态性能。

例7-26 设有零阶保持器的离散系统如图7-33（单位负反馈）所示，其中

$$G(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-Ts})\frac{K}{s(s+1)}$$

$r(t)=1(t), T=1s, K=1.$试分析该系统的动态性能。

解： 系统开环脉冲传递函数G(z)如下。

$$G(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{K}{s(s+1)}]=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s^2(s+1)}]$$

查Z变换表，求出

$$G(z)=(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

$$=\frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环脉冲传递函数如下

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

将R(z)代入上式，求出单位阶跃序列响应的z变换：

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-2z^{-1}+1.632z^{-2}-0.632z^{-3}}$$

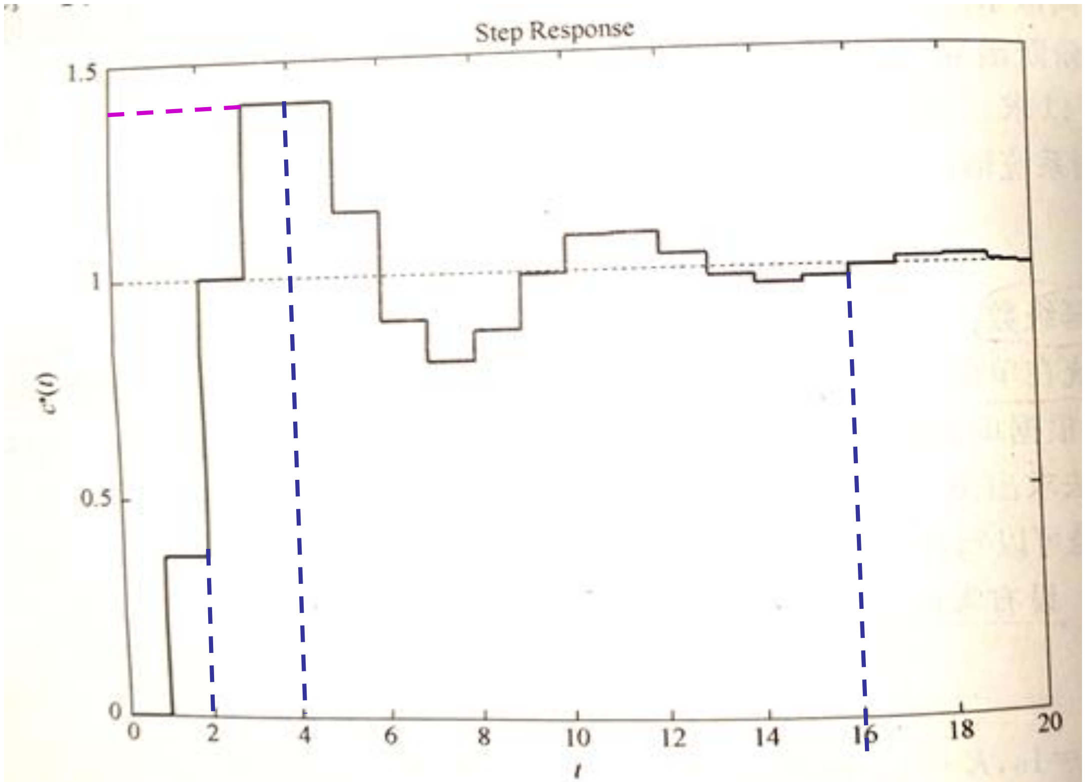
通过综合除法，将C(z)展开成无穷幂级数：

$$C(z)=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}$$
$$+0.895z^{-6}+0.802z^{-7}+0.868z^{-8}+\cdots$$

基于Z变换的定义，知单位阶跃作用下的输出序列c(nT)为

$$c(0)=0 \qquad c(T)=0.368 \qquad c(2T)=1 \qquad c(3T)=1.4$$
$$c(4T)=1.4 \quad c(5T)=1.147 \quad c(6T)=0.895 \qquad \cdots$$

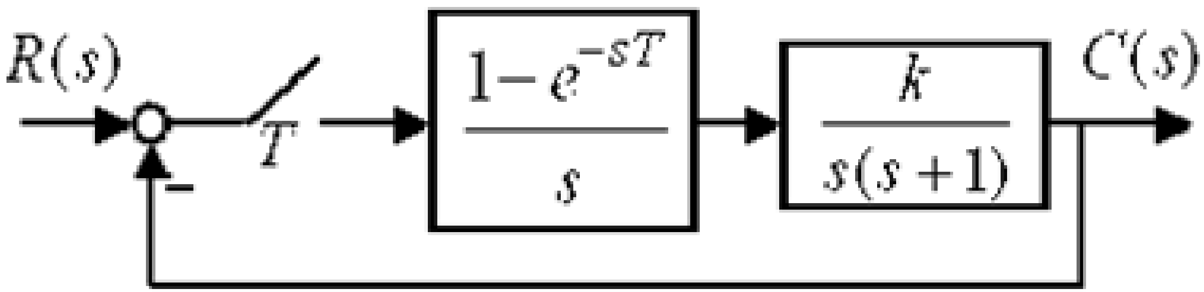
根据上述c(nT)的数值，可以绘出离散系统的单位阶跃响应c*(t)如下，由图可求离散系统的近似性能指标：



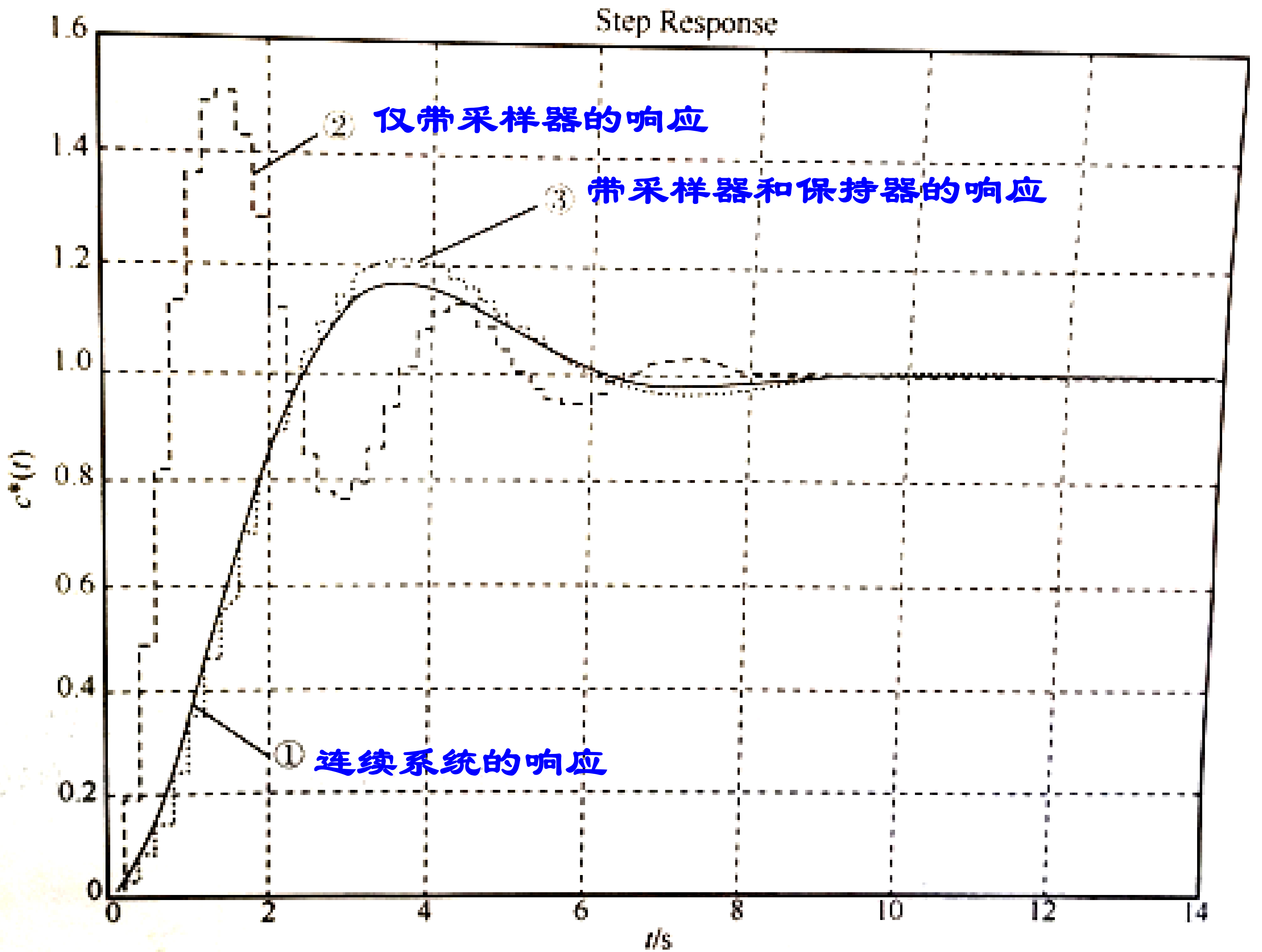
上升时间tr=2s，峰值时间tp=4s，调节时间ts=16s（Δ=2%），超调量σ%=40%。

2.采样器和保持器对动态性能的影响（自学）

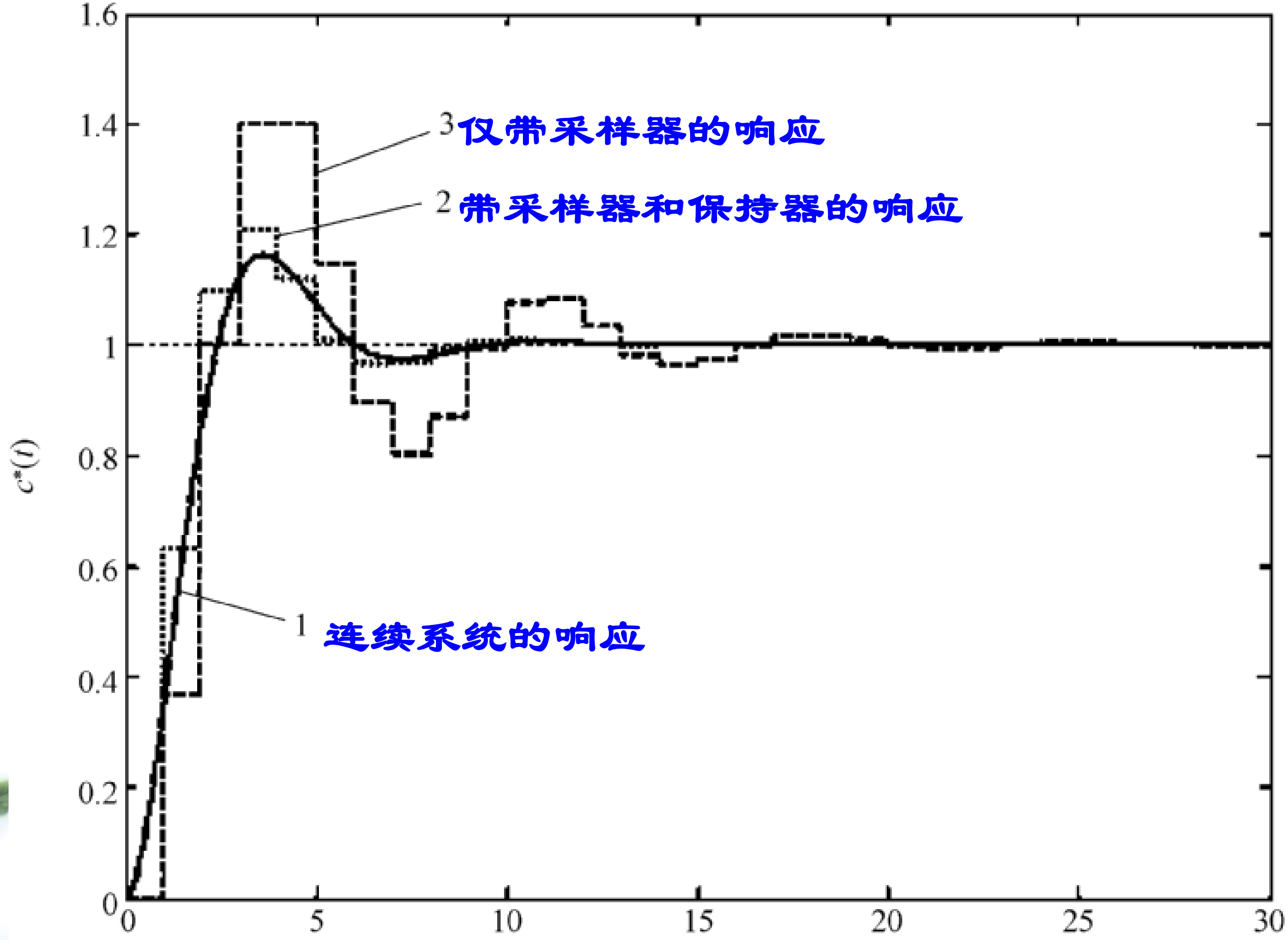
采样器和保持器不影响开环脉冲传递函数的极点，但会影响其零点，故采样器和保持器会影响闭环脉冲传递函数的极点，进而影响系统动态性能。下面通过例子进行定性分析。



例 7-26 其中取T=0.2，K=1，得三种情况下的单位阶跃响应曲线如下。


Step Response
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
c*(t)
0
2
4
6
8
10
12
14
t/s
②仅带采样器的响应
③带采样器和保持器的响应
①连续系统的响应

其中取T=1，K=1，得三种情况下的单位阶跃响应曲线如下。



- 采样器和保持器对离散系统的动态性能有如下影响：

  1）采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减小，但**使超调量增大，即采样造成的信息损失会降低系统的稳定程度。**然而，在某些情况下，例如在具有大延迟的系统中，误差采样反而会提高系统的稳定程度。

  2）零阶保持器在**采样周期较小时**，对系统时间响应的**峰值时间和调节时间都影响不大**，**但超调量有所增加**。这是因为除了**采样造成的不稳定因素外，零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。**

P304作业

- 7-9（a），7-12，7-13，7-14，7-15

作业答案

- 7-2（1）（4）

$$(1)Z[a^n]=\frac{z}{z-a}$$

$$(4)Z[\frac{s+1}{s^2}]=\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

7-3（1）

$$(1)e(nT)=10(2^n-1)$$

$$(2)e(nT)=-2n-3$$

7-5

$$(1)e(\infty)=\infty$$

$$(2)e(\infty)=\infty$$

作业答案

7-9（a）

$$(a)\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)}$$

$$(\mathrm{b})C(z)=\frac{RG_2G_4(z)+RG_1(z)\cdot G_hG_3G_4(z)}{1+G_hG_3G_4(z)}$$

7-12（2）

（1）不稳定

（2）不稳定

7-13

（1）不稳定

（2）$0<K<1.66$

作业答案

7-14

(1)系统稳定

(2)$e_{ss} = 0.1$

7-15

(1)$K_p = \infty, K_v = 0.1, K_a = 0$

(2)$e_{ss} = \dfrac{T}{K_v} = 1$